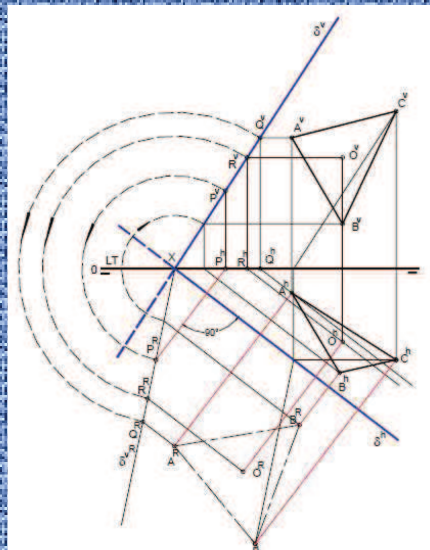
GENERALIDADES EN EL ESTUDIO DE LA DOBLE PROYECCIÓN ORTOGONAL

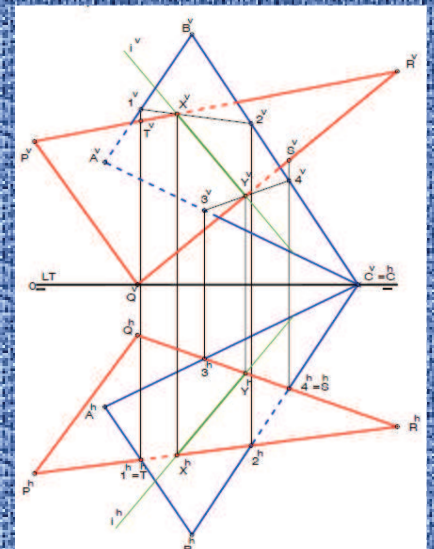
Con ejercicios resueltos

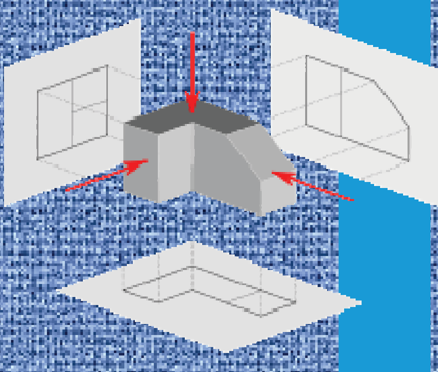
JORGE LUIS CALDERÓN SALCEDO

Profesor de la Universidad de Los Andes

Mérida—Venezuela







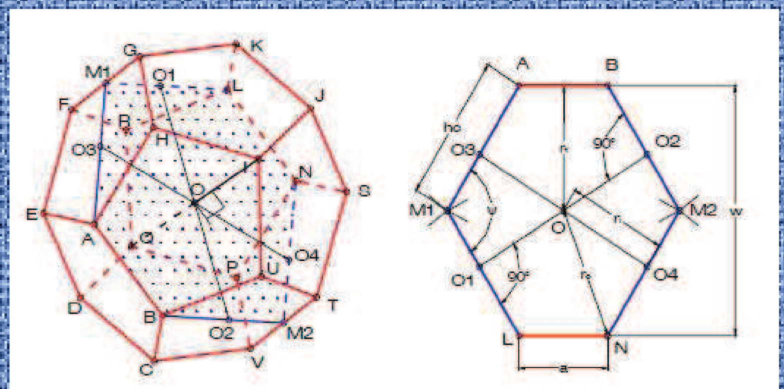


TABLA DE CONTENIDO

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas aquellas personas que de una u otra manera colaboraron en la elaboración de estas páginas, fundamentalmente a los profesores Beatriz Sandia, Pedro Araujo y Erick Muñoz, miembros del Departamento de Ciencias Aplicadas y Humanísticas, quienes aportaron valiosas recomendaciones.

Mención especial merece el profesor Louis Marcel Sous del Departamento de Comunicación Visual de la Facultad de Arquitectura y Arte, quien fuera mi tutor y orientador durante los primeros años de mi carrera como docente.

RESUMEN

La finalidad de este texto "Generalidades en el estudio de la Doble Proyección Ortogonal. Con Ejercicios Resueltos", en el cual se desarrolla todo el programa de la asignatura Sistemas de Representación 10, es servir como material de apoyo a los alumnos que cursan el primer semestre en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes, permitiendo abaratar en alguna medida el costo de la enseñanza al ser publicado en la Internet.

El contenido se encuentra dividido en cinco capítulos y un apéndice. En el primero de los capítulos se hace una breve introducción, en la que se especula acerca del origen y desarrollo de la geometría en el pensamiento y obras del ser humano, para luego iniciar al lector en los conceptos y características fundamentales de los sistemas de representación como medio de expresión de la geometría descriptiva. Seguidamente, se detallan las características del sistema de doble proyección ortogonal, sus elementos constitutivos y las normalizaciones propias del Sistema Internacional, desembocando en el concepto y proyecciones del punto y la recta. En esta sección se incluyen los métodos gráficos indirectos utilizados en la determinación del verdadero tamaño y ángulos de segmentos de recta, así como los casos típicos de su aplicación.

El capítulo número dos está en su totalidad dedicado al plano, sus definiciones y posiciones que adopta en el sistema diédrico, las rectas contenidas en él y los métodos indirectos que permiten la determinación del verdadero tamaño de las figuras planas.

El tercer capítulo contempla el estudio de las diferentes relaciones que se establecen entre los elementos geométricos elementales, enunciando los distintos postulados y aplicándolos en el sistema diédrico. Asimismo, se incluye una serie de problemas métricos y el concepto de lugar geométrico acompañado de distintos ejemplos de aplicación, tan útiles en la formación de una estructura de pensamiento lógico en el estudiante.

Como una síntesis de los temas contemplados en los primeros tres capítulos, el número cuatro corresponde al estudio de los poliedros, su clasificación, características, construcción y doble proyección ortogonal. De acuerdo con el programa de la asignatura, se estudian de manera específica poliedros radiales (prismas y pirámides) rectos de base regular, el tetraedro y el hexaedro o cubo, agregando el resto de los poliedros regulares, no contemplados en el mencionado programa.

El quinto capítulo corresponde a una serie de treinta ejercicios resueltos tipo examen agrupados en cuatro partes – en consonancia con los cuatro capítulos teóricos – y ordenados en orden creciente de dificultad. El apéndice no es más que una breve descripción de los instrumentos empleados en el dibujo técnico, acompañada de pequeñas recomendaciones para su buen uso y de una serie de ejemplos de construcciones geométricas básicas.

Al final se encuentra la bibliografía utilizada durante toda la experiencia del autor, primero como estudiante y luego como docente, que deber ser de obligatoria consulta por parte de los alumnos para ampliar tanto los temas tratados en esta obra como los no expuestos, constituyendo al mismo tiempo un tributo de agradecimiento a esos autores.

SUMMARY

The purpose of this text "Generalities in the study of the Double Orthogonal Projection. With Solved Exercises", in which the whole program of the subject Systems of Representation 10 is developed, is to serve as material of support to the students who attend the first semester in the Faculty of Engineering of the University of Los Andes, allowing to reduce in some measurement the cost of the education on having been published in the Internet.

The content is divided in five chapters and an appendix. In the first one of the chapters there is made a brief introduction, in which it is inspected about the origin and development of the geometry in the thought and works of the human being, then initiate the reader in the concepts and fundamental characteristics of the systems of representation as way of expression of the descriptive geometry. Next, details the characteristics of the system of double orthogonal projection, its constitutive elements and the own normalizations of the International System, ending in the concept and projections of the point and the straight line. In this section there are included the graphical indirect methods used in the determination of the real size and angles of segments of straight line, as well as the typical cases of its application.

The chapter number two is dedicated in its entirety to the plane, its definitions and positions that it adopts in the diedric system, the straight lines contained in it and the indirect methods that allow the determination of the real size of the flat figures.

The third chapter contemplates the study of the different relations that are established between the geometric elementary elements, enunciating the different postulates and applying them in the diedric system. Likewise, there is included a series of metric problems and the concept of geometric place accompanied of different examples of application, so useful in the formation of a structure of logical thought in the student.

As a synthesis of the topics contemplated in the first three chapters, the number four corresponds to the study of the polyhedrons, its classification, characteristics, construction and double orthogonal projection. In agreement with the program of the subject, there is a study of radial rigth polyhedrons (prisms and pyramids) with regular base, the tetrahedron and the hexahedron or bucket in a specific way, adding the rest of the regular polyhedrons, not contemplated in the mentioned program.

The fifth chapter corresponds to a series of thirty solved examination-type exercises grouped in four parts - in agreement with four theoretical chapters - and arranged in increasing order of difficulty. The appendix is not any more than a brief description of the instruments used in the technical drawing, accompanied of small recommendations for its good use and of a series of examples of geometric basic constructions.

In the end is the bibliography used during all the experience of the author, first as student and then as teacher, which should be of obligatory consultation on the part of the pupils to extend so much the topics treated in this work as the done not exposed, constituting at the same time a tribute of gratefulness to those authors.

PRÓLOGO

El conocimiento de las herramientas de expresión gráfica de índole técnica es un requisito obligatorio en el haber académico de cualquier profesional de la ingeniería, la arquitectura y el diseño gráfico e industrial. La correcta comprensión y el manejo apropiado de las realidades tridimensionales complejas obliga al estudiante a tomar con suma seriedad los cursos de geometría descriptiva y diseño de proyectos, como complemento de las demás asignaturas del pemsum de estudio correspondiente.

Por otra parte, el estudio de la geometría descriptiva y la resolución de problemas geométricos proporciona al futuro ingeniero una estructura de pensamiento lógico, que, indudablemente, va a facilitar la comprensión y el éxito en su carrera académica y profesional.

El autor no pretende competir académicamente con los textos de renombrado valor que se han escrito sobre la materia, como lo son las obras de Harry Osers y Fernando Izquierdo, entre otros; su intención es producir un trabajo ajustado en lo posible al plan de estudios seguido en la ULA y al nivel académico de los bachilleres venezolanos, sirviendo como guía de apuntes y de ejercicios. Por otra lado, la publicación en forma electrónica de este texto va a permitir que cualquier persona a nivel mundial tenga acceso a su contenido, permitiendo contar con una versión virtualmente indestructible y de bajo costo.

Se recomienda al lector no avanzar de un capítulo al siguiente sin antes haber alcanzado un nivel aceptable de experticia en el manejo de los conceptos y procedimientos, dado que la propia estructura de la materia implica una acumulación constante de conocimientos, tal que si se pretende resolver exitosamente los ejercicios de construcción de poliedros, por ejemplo, es preciso dominar todos los temas precedentes.

El estudiante que pueda resolver correctamente los problemas, debe poseer una sólida comprensión de los principios fundamentales que aplique y saber atacarlo empleando diferentes métodos, en lugar de ser experto en el uso de un método determinado.

Es deseo del autor que este modesto trabajo sirva a los estudiantes en su cometido y los impulse a tomar con interés y cariño el estudio de temas tan apasionantes como los relacionados con la geometría descriptiva. Al mismo tiempo, espera la crítica siempre útil y constructiva de profesores y alumnos, como un incentivo para trabajar cada día con más bríos en el perfeccionamiento de su desempeño como docente al servicio de la formación de futuros ingenieros.

SIMBOLOGÍA

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
A, B, 1, 2	Un Punto
A^h	Proyección del punto A sobre el plano horizontal
A^v	Proyección del punto A sobre el plano vertical
A^R	Punto A abatido sobre un plano de proyección o sobre uno paralelo a éste
A^2, A^3	Proyección auxiliar del punto A
a, b, m, t, w	Una recta, una longitud
AB, 12, 23	Un segmento de recta
a	Longitud de arista de un poliedro regular
d	Diagonal principal de un poliedro, diagonal de un polígono
h	Altura de un poliedro
hc	Altura de cara de un poliedro regular
I	Punto de intersección entre una recta y un plano
i	Recta de intersección entre dos planos
LT	Línea de tierra
LT2, LT3	Línea de tierra auxiliar
O	Centro de un poliedro regular, centro de un polígono
PH	Plano horizontal de proyección
PL	Plano lateral de proyección
PV	Plano vertical de proyección
r	Radio de una circunferencia
r_c	Radio de la esfera circunscrita a un poliedro regular
r_i	Radio de la esfera inscrita en un poliedro regular
r_t	Radio de la esfera tangente a las aristas de un poliedro regular
TH	Traza en el plano horizontal de una recta
TV	Traza en el plano vertical de una recta
X	Abcisa de un elemento geométrico, un punto arbitrario del espacio
Y	Ordenada o vuelo de un elemento geométrico, un punto arbitrario del espacio
Z	Cota o Altura de un elemento geométrico
α	Ángulo entre una recta o un plano y el plano horizontal de proyección
β	Ángulo entre una recta o un plano y el plano vertical de proyección
δ, γ, λ, μ, π	Un plano
δ^h	Traza en el plano horizontal del plano δ
δ^l	Traza en el plano lateral del plano δ
δ^v	Traza en el plano vertical del plano δ
δ^2	Traza en un plano auxiliar del plano δ
ϕ	Ángulo entre dos elementos geométricos
ΔY_{AB}	Diferencia de vuelo entre los puntos A y B
ΔZ_{AB}	Diferencia de vuelo entre los puntos A y B

CAPÍTULO I

1.1 A MANERA DE INTRODUCCIÓN

Las principales consideraciones geométricas son muy antiguas y, al parecer se originaron en observaciones realizadas por el hombre, gracias a su habilidad para reconocer y comparar formas y tamaños.

Muchas circunstancias en la vida del hombre, aún en la edad primitiva, condujeron a numerosos descubrimientos geométricos: la noción de la distancia fue, sin duda alguna, uno de los primeros conceptos geométricos descubiertos; la estimación del tiempo necesario para hacer un viaje le condujo, originalmente, a observar que la recta constituye la trayectoria más corta de un punto a otro; incluso, por intuición, la mayoría de los animales se dan cuenta de esto. La necesidad de limitar terrenos llevaron a la noción de figuras geométricas simples, tales como rectángulos, cuadrados, triángulos, etc. Otros conceptos geométricos simples, como las nociones de verticalidad, de rectas paralelas, pueden haber sido sugeridas por la construcción de paredes y viviendas primitivas.

También muchas observaciones en la vida diaria pudieron haber conducido a los primeros hombres al concepto de curvas, superficies y sólidos. Los casos de circunferencia fueron numerosos: la periferia del sol, de la luna, las ondas que se forman al lanzar una piedra en un estanque, las sombras producidas por el sol o un candil debieron sugerir la noción de secciones cónicas. Los alfareros primitivos hicieron sólidos de revolución. El cuerpo del hombre, de los animales, de muchas hojas y flores de plantas sugieren la noción de simetría. La idea de volumen viene de manera casi inmediata, al considerar recipientes para contener líquidos, cereales y otros artículos de consumo diario.

De esta manera se fue creando, inconscientemente, una geometría utilizada en un principio por el hombre para solucionar problemas geométricos concretos, que bien pudieron presentársele de manera aislada, sin conexión aparente entre unos y otros, y, evidentemente, también la pudo utilizar en la fabricación de objetos ornamentales y artísticos.

Naturalmente, esas manifestaciones artísticas y esos problemas concretos contribuyeron al nacimiento y posterior desarrollo de la geometría, la cual comenzó a volverse una ciencia cuando la inteligencia humana fue capaz de extraer de relaciones geométricas concretas una relación geométrica abstracta y general, que contiene a las primeras como casos particulares.

La tradición atribuye los principios de la geometría como ciencia a las prácticas primitivas de la agrimensura en Egipto; la palabra *geometría* significa “medición de la tierra”. Pero no sólo los egipcios contribuyeron al desarrollo de la geometría: los babilonios también trabajaron en la geometría empírica y resolvieron problemas prácticos.

Unos cuantos siglos antes de Cristo, toda la sabiduría empírica acumulada por egipcios y babilonios pasa a poder de los griegos; pero éstos, a diferencia de aquéllos, pusieron gran empeño en concluir los hechos geométricos no sólo de manera empírica, sino, primordial y casi exclusivamente, con base en razonamientos deductivos.

En la búsqueda de la representación de elementos geométricos y de métodos que permitieran establecer las relaciones existentes entre ellos, el hombre se ha valido del dibujo, primero sobre toscas paredes de cavernas y luego sobre materiales manufacturados, constituyéndose esta herramienta en el lenguaje de la geometría y en medio de estudio y comunicación que posibilitó la construcción de maravillas como las grandes pirámides, templos y edificios civiles y militares de grandes dimensiones y de un altísimo grado de perfeccionamiento técnico, en regiones como Egipto, Mesopotamia y el

mundo griego. Al mismo tiempo, hizo posible la materialización de invenciones como el tornillo sin fin, la rueda dentada y otras maravillas de la ingeniería antigua.

Ahora bien, como se ha indicado, el dibujo constituye también una forma de comunicación, y, como cualquiera otra, debe ser clara y sin ambigüedades, sobre todo cuando el mensaje que se quiere transmitir es la abstracción de un objeto útil cuyas características deben de ser respetadas en el momento de su materialización. Surge entonces la pregunta: si los objetos son tridimensionales, ¿cómo representarlos sobre una superficie bidimensional manteniendo clara la información concerniente a sus propiedades geométricas? La respuesta que se ha dado a tal interrogante es el método de *proyecciones.*

La proyección de un elemento (*cuerpo proyectante)* se obtiene por la incidencia de un *haz proyectante* sobre él, que al intersecar a una superficie plana determinada genera una representación bidimensional. De las características de ese haz proyectante y de la posición relativa entre él, la superficie de proyección y el objeto, depende el tipo de representación que se obtiene.

Si estudiamos un caso real, el haz de rayos proyectantes puede asociarse a una fuente luminosa (lámpara, luz solar), en tanto que si abordamos el estudio de elementos geométricos abstractos, el mencionado haz viene a ser un conjunto de rectas que pasan por un punto, el cual se denomina *origen de proyecciones o Foco*. Por otra parte, la superficie de proyección, que en el caso real puede ser cualquiera, se toma como plana en Geometría Descriptiva, mientras que la sombra viene a ser análoga de la proyección del objeto(Fig. 1.1).

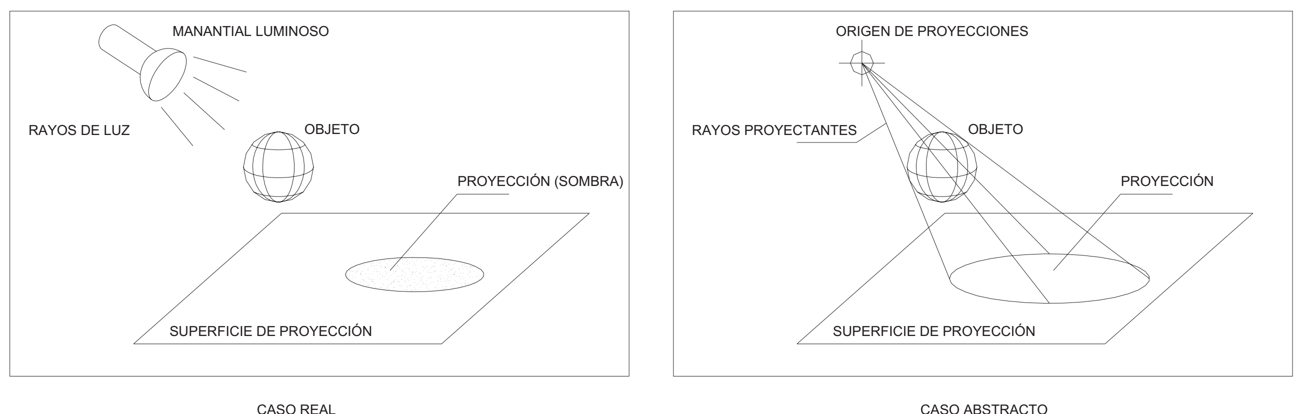


Fig. 1.1: Proyección de un objeto

1.2 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

El conjunto conformado por el origen de proyecciones, el haz de rayos proyectantes, la superficie de proyección, el cuerpo proyectante y la proyección misma, constituye un *Sistema de Proyección* que resulta ser finalmente un *Sistema de Representación Gráfica.* Como todo sistema, es un conjunto de elementos – abstractos en éste caso – que se conjugan de manera ordenada y armónica para lograr la consecución de un fin: la representación bidimensional de una realidad tridimensional que, aunque abstracta, es una aproximación de nuestro entorno cotidiano.

Existe una gama infinita de sistemas de proyección que puede clasificarse en dos grupos principales, a saber, Sistemas Cónicos y Sistemas Cilíndricos. La diferencia entre ambos radica en la posición que se la asigna al origen de proyecciones en cada caso.

Sistemas Cónicos: El origen de proyecciones se encuentra en un lugar finito del espacio, lo que trae como consecuencia la convergencia de los rayos proyectantes. Si éstos se asocian con rayos visuales y el origen de proyecciones se asocia con el ojo humano, puede inferirse que con los sistemas cónicos se obtienen representaciones que se aproximan a las imágenes que nuestro cerebro capta de los objetos físicos reales. En realidad estos sistemas generan gráficas análogas a las producidas por cámaras fotográficas, afectadas por deformaciones con respecto a los elementos reales, lo que dificulta la determinación de medidas exactas y la apreciación de las formas planas. Para una mejor comprensión puede hacerse la comparación con un sistema de iluminación artificial en donde la fuente luminosa es una lámpara.

Sistemas Cilíndricos: A diferencia de los cónicos, estos sistemas tienen la particularidad de ubicar el origen de proyecciones en el infinito, es decir, resulta ser un punto *impropio.* Como consecuencia de ello, los rayos proyectantes forman entre sí un ángulo CERO, es decir, son paralelos pues convergen en el infinito (Fig. 1.2). Es evidente que resulta difícil comparar este tipo de sistema de proyección con alguna forma de visión, sin embargo resulta útil establecer semejanza con un sistema de iluminación natural, en el que la fuente de luz es el sol, dado que este astro se encuentra tan alejado de la tierra y es tan grande con relación a nuestro planeta, que los rayos solares son, en la práctica, paralelos entre sí.

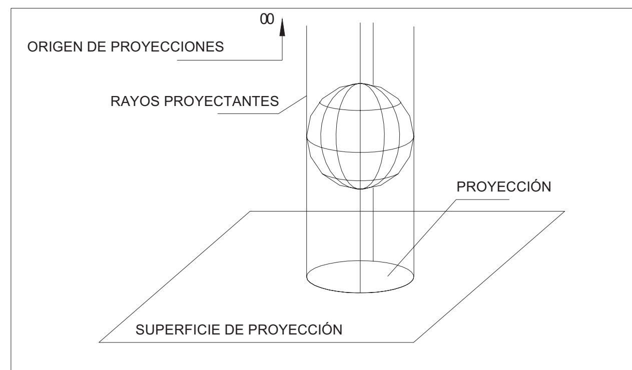


Fig. 1.2: Proyección Cilíndrica

Es evidente que si los rayos proyectantes son paralelos entre sí, cada uno de ellos forma un ángulo μ igual con respecto a la superficie de proyección, lo que implica la existencia de infinitos sistemas de proyección cilíndricos dependiendo del valor que tome μ. En general, se habla de *sistemas cilíndricos ortogonales* si $\mu=90°$ y de *sistemas cilíndricos oblicuos si* $\mu\neq90°$ (Fig. 1.3).

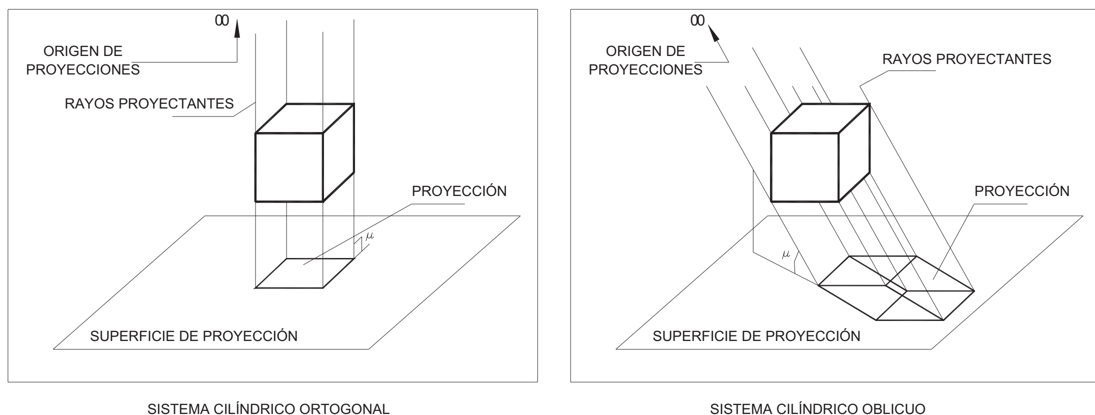


Fig. 1.3: Sistemas de Proyección Cilíndricos.

La variante ortogonal de los sistemas cilíndricos es la empleada en la representación técnica, ya sea con uno o más planos de proyección. Constituye, además, el sistema de proyección que presenta menos dificultad a la hora de resolver problemas geométricos en el espacio.

1.3 SISTEMA DE DOBLE PROYECCIÓN ORTOGONAL

También conocido como *Sistema Diédrico* o *Sistema de Monge*, contempla dos planos de proyección perpendiculares entre sí que coinciden con los planos coordenados XY y XZ de un sistema de ejes cartesiano. En consecuencia, constituye la herramienta más adecuada para el estudio descriptivo de la geometría espacial.

El plano XY se considera Plano Horizontal (PH) de referencia y las proyecciones sobre él se denominan *proyecciones horizontales, icnográficas* o también *planta.* El plano XZ será entonces el Plano Vertical (PV) de referencia, y las proyecciones respectivas son llamadas *proyecciones verticales, ortográficas* o *alzado* (3).

La intersección de los dos planos de proyección se llama *eje de proyección* y más comúnmente *línea de tierra* (LT), porque se supone que el plano horizontal de proyección coincide con el del terreno. Dicha línea corresponde al eje coordenado X, de acuerdo con el Sistema Internacional, y divide a cada uno de los planos de proyección en dos regiones, que se denominan *superior* (+PV) e *inferior* (-PV) para el plano vertical, y *anterior* (+PH) y *posterior* (-PH) para el horizontal (Fig. 1.4).

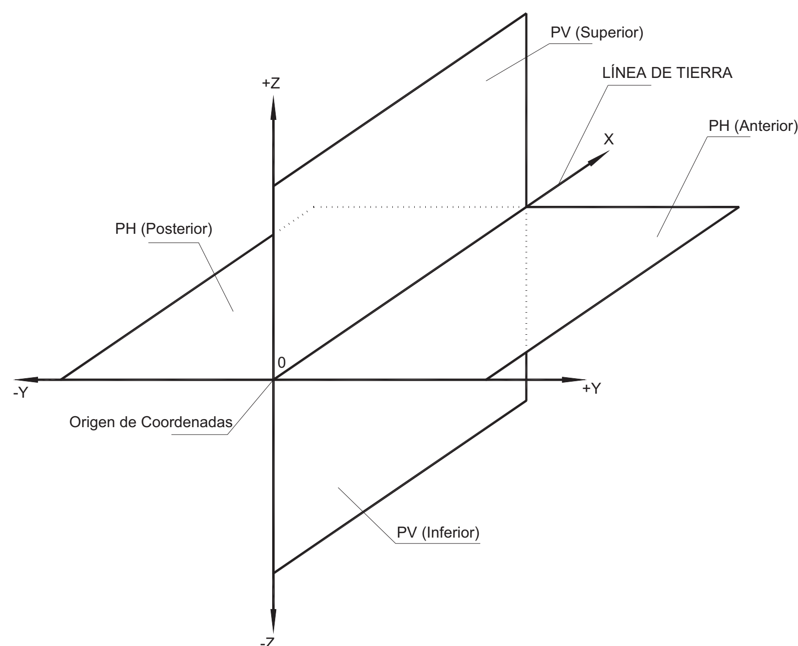


Fig. 1.4: El Sistema de Doble Proyección Ortogonal.

A su vez, los dos planos coordenados de proyección, debiéndoseles considerar como infinitos, dividen al espacio en cuatro regiones o *diedros:* Primero (anterior-superior), Segundo (superior-posterior), Tercero (posterior-inferior) y Cuarto (inferior-anterior). Las proyecciones horizontales se generan por la incidencia de rayos proyectantes paralelos al eje Z – y por ende perpendiculares a PH - cuyo origen se supone, por convención, en el primer diedro a distancia infinita de PV. Análogamente, las proyecciones verticales son producidas por rayos paralelos a Y, provenientes de un foco que se supone en el primer diedro a distancia infinita de PH.

Con el fin de facilitar el análisis, y en vista de que el plano coordenado YZ no se ha tomado como un plano de proyección principal, se omite la consideración de la parte negativa del eje X.

Como en la práctica es necesario dibujar sobre un plano único las proyecciones de una figura, se abate uno de los planos coordenados sobre el otro, haciéndolo girar alrededor de la línea de tierra de modo que se abran los diedros primero y tercero. Se abate uno u otro de los planos de proyección según la posición de la superficie de dibujo, de manera que si ésta es vertical, conviene suponer que el giro de 90° lo realiza PH, en tanto que si es horizontal, se supondrá que es PV quien gira (Fig. 1.5). El giro se realizará, de acuerdo con la norma internacional, haciendo coincidir la parte anterior de PH con la inferior de PV.

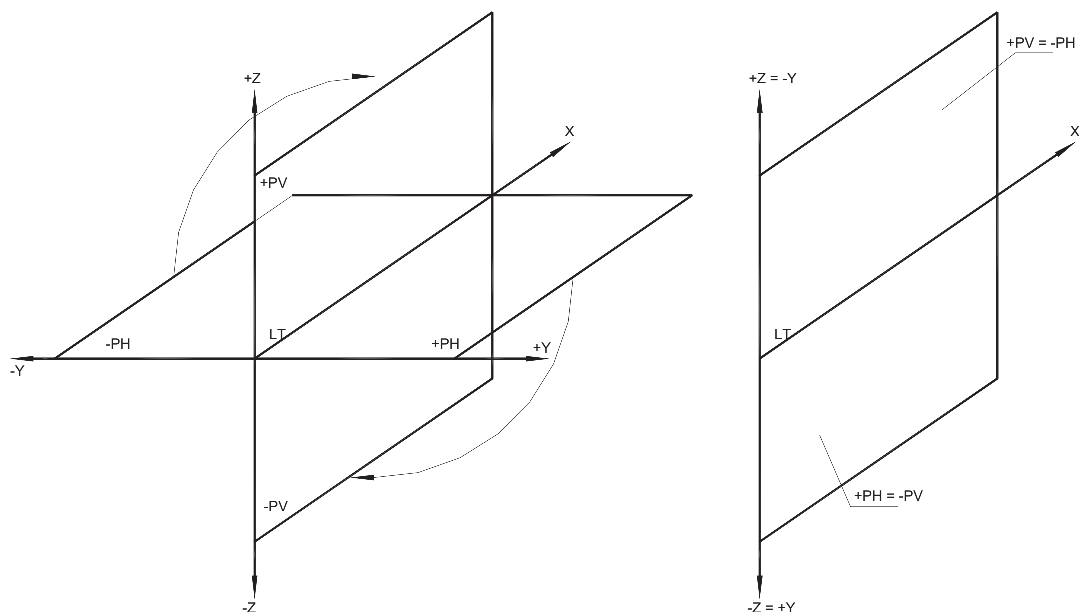


Fig. 1.5: Abatimiento de los planos de proyección.

1.4 EL PUNTO

El estudio de los sistemas de representación debe ser el de los distintos elementos geométricos, de las relaciones que se establecen entre ellos y sus aplicaciones prácticas. El elemento geométrico fundamental es el punto, el cual es *adimensional* y puede definirse a través de su posición en el espacio mediante coordenadas, referidas a un sistema que normalmente es rectangular (cartesiano).

El espacio geométrico euclídeo o vulgar está compuesto por una cantidad infinita de puntos; la suma de infinitos elementos adimensionales conforma un todo.

Las dos proyecciones de un punto P del espacio en el sistema Diédrico se obtienen construyendo rayos proyectantes que pasan por el punto y que sean perpendiculares a los planos de proyección. Los puntos comunes a los rayos y a estos planos constituyen las *proyecciones diédricas* de P. Tales proyecciones se denotan, en este trabajo mediante una letra mayúscula o un número (nombre del punto) con un superíndice que indica el plano de proyección en donde se encuentran. Este superíndice es un letra minúscula: *h,* si se trata de la proyección sobre el plano vertical y *v,* si se trata de la proyección sobre el plano horizontal.

El punto P y sus proyecciones diédricas determinan un plano, que puede llamarse el plano proyectante del punto P. Este plano es perpendicular a los dos planos de proyección y por lo tanto lo es también a su intersección LT. Las intersecciones P_oP^v y P_oP^h del plano proyectante con PV y PH, son perpendiculares a la línea de tierra y representan las coordenadas *z* y *y* del punto P; la distancia del origen de coordenadas a P_o constituye la coordenada *x*; la línea P_oP^h se mantiene perpendicular a la línea de tierra cuando PH gira noventa grados en torno a ella (Fig. 1.6).

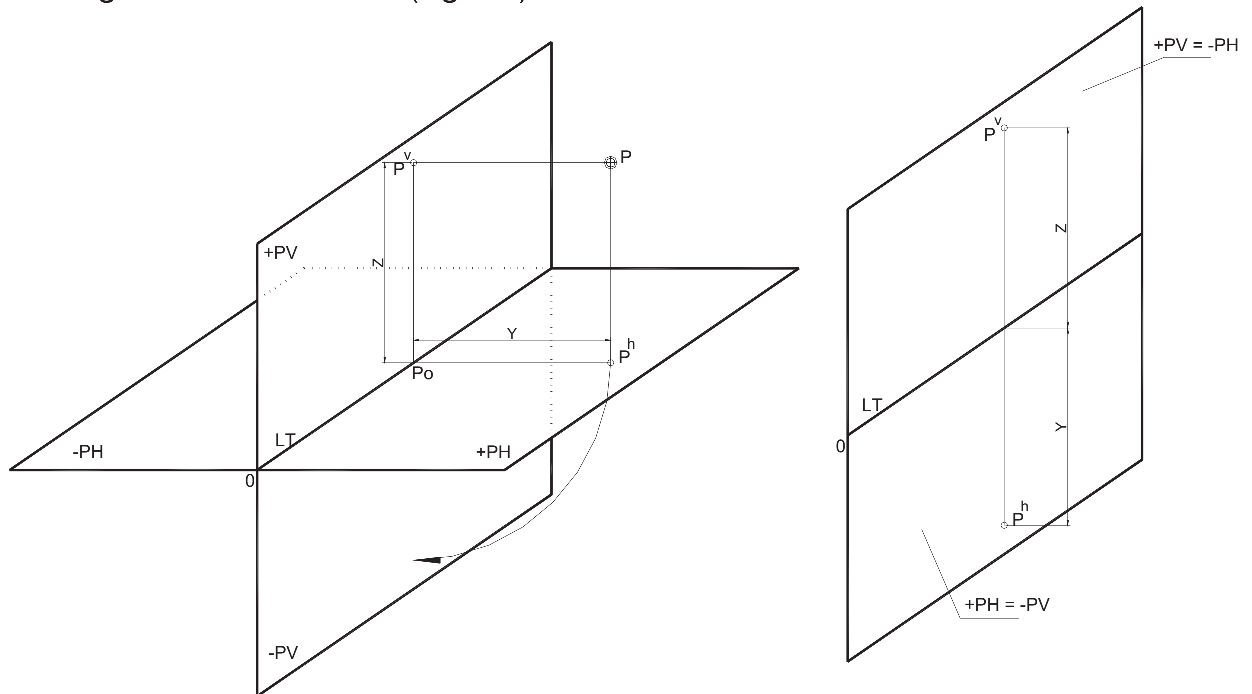


Fig. 1.6: Proyecciones diédricas de un punto.

La distancia del punto a PH tiene el valor de su coordenada *z* y se denomina comúnmente *cota*, ya que el plano horizontal se asocia con el del terreno. Del mismo modo la distancia del punto a PV corresponde al valor de su coordenada *y* y recibe el nombre de *vuelo o alejamiento.* Como luego del giro ambos planos de proyección coinciden, las dos proyecciones del punto P estarán en la dirección P_oP^v, de manera que: *la proyección horizontal y la vertical de un punto, después de efectuar el abatimiento de uno de los planos de proyección sobre el otro, se ubican siempre sobre una línea recta perpendicular a la línea de tierra.*
De manera recíproca, dos puntos P^v y P^h del dibujo situados en una línea recta perpendicular a la línea de tierra, se consideran como las proyecciones de un único punto del espacio P. Así, pues, cada punto del espacio está completamente definido mediante sus dos proyecciones diédricas, por ello, cualquier otra proyección que se realice será de carácter auxiliar.

Dependiendo de los valores que adopten las coordenadas rectangulares de un punto del espacio se obtienen siete posiciones características, a saber:

1. Punto A ubicado en la Primera Región: Sus coordenadas *y* y *z* son positivas; tiene su proyección horizontal por debajo de la línea de tierra y su proyección vertical por encima de ella.
2. Punto B ubicado en la Segunda Región: Su coordenada *y* es negativa y su coordenada *z* es positiva; tiene ambas proyecciones ubicadas por encima de la línea de tierra.

3. Punto C ubicado en la Tercera Región: Sus coordenadas *y* y *z* son negativas; tiene su proyección horizontal por encima de la línea de tierra y su proyección vertical por debajo de ella.
4. Punto D ubicado en la Cuarta Región: Su coordenada *y* es positiva y su coordenada *z* es negativa; tiene ambas proyecciones ubicadas por debajo de la línea de tierra.
5. Punto E ubicado en el plano horizontal de proyección: Su coordenada *z* es cero; si la coordenada *y* es positiva, el punto se encuentra en la parte anterior de PH, si es negativa, se encuentra en la parte posterior. La proyección vertical del punto se ubica sobre la línea de tierra.
6. Punto F ubicado en el plano vertical de proyección: Su coordenada *y* es cero; si la coordenada *z* es positiva, el punto se encuentra en la parte superior de PV, si es negativa, se encuentra en la parte inferior. La proyección horizontal del punto se ubica sobre la línea de tierra.
7. Punto G ubicado en ambos planos de proyección: Es un punto que pertenece a la línea de tierra, ya que ésta constituye el lugar común a PV y PH. Sus coordenadas *y* y *z* son cero. Ambas proyecciones se ubican sobre la línea de tierra.

Las posiciones descritas se muestran en la Fig. 1.7.

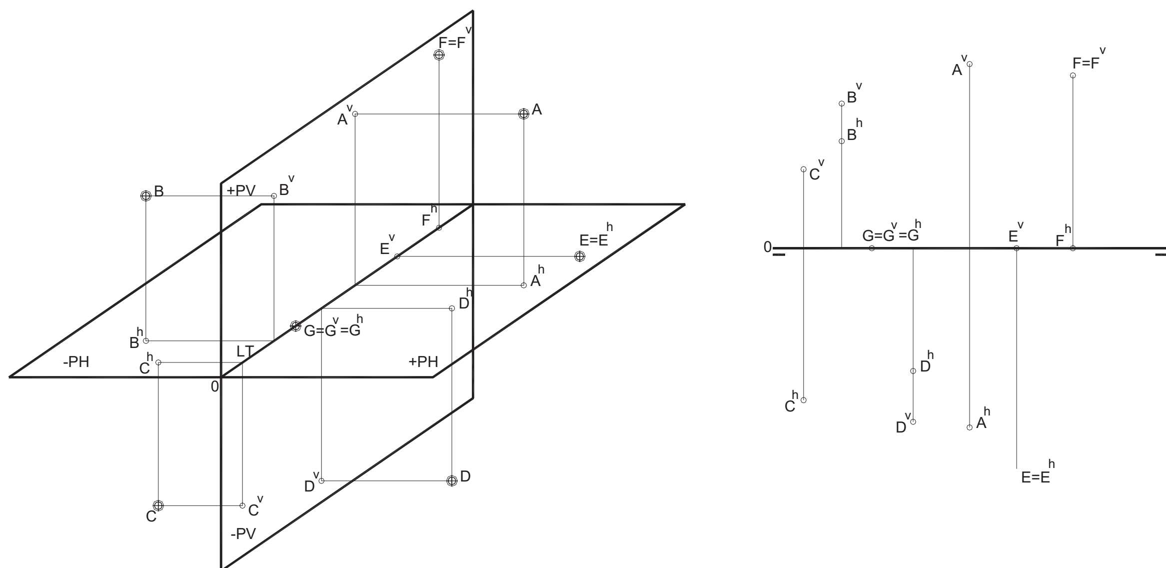


Fig. 1.7: Posiciones del punto. Representación en el Sistema Diédrico.

1.5 LA RECTA

Es el elemento geométrico *unidimensional* y puede determinarse a través de un *segmento de recta,* el cual, a su vez, se define como la menor distancia entre dos puntos.

El estudio de las proyecciones diédricas de la recta se realiza atendiendo a las distintas posiciones que ésta puede adoptar con respecto al sistema de referencia empleado, es decir, con respecto a los planos coordenados de proyección: Plano Vertical y Plano Horizontal.

Las variables objeto de estudio es las proyecciones diédricas son, en definitiva, las concernientes a las características de la recta: tamaño de un segmento (longitud) y ángulos que forma con los planos de proyección (dirección). La clasificación de las distintas

posiciones de recta se realiza variando estos ángulos, comenzando por las *posiciones notables*, que son aquellas situaciones en las que la recta forma con los planos de proyección ángulos *notables:* cero y noventa grados.

Si un punto del espacio pertenece a una determinada recta, las proyecciones de aquél deben situarse sobre las proyecciones homónimas de ésta.

1.5.1 Trazas de la recta

Sea una recta "m" definida por el segmento AB; los puntos pertenecientes a una recta "m" que se encuentran sobre los planos de proyección se denominan *trazas de la recta "m".* En vista de que existen dos planos principales de proyección, se llamará *traza horizontal* (TH) de la recta al punto común entre ella y PH, y *traza vertical* (TV) de la recta al punto común entre ella y PV (Fig. 1.8).

Evidentemente, la traza vertical es también el punto de intersección de la recta con su proyección vertical, y como este punto se halla en el plano vertical, tendrá su proyección horizontal en la línea de tierra. Por otra parte, siendo la traza vertical un punto perteneciente a la recta en el espacio, su proyección vertical deberá encontrarse sobre la proyección vertical de "m"; por lo tanto, la proyección horizontal de la traza vertical corresponde al corte entre la proyección horizontal de "m" con la línea de tierra. Análogamente, el corte de la proyección vertical de la recta "m" con la línea de tierra es la proyección vertical de la traza horizontal (punto de PH, Z = 0); la proyección horizontal de ese punto se encuentra sobre la proyección horizontal de la recta "m".

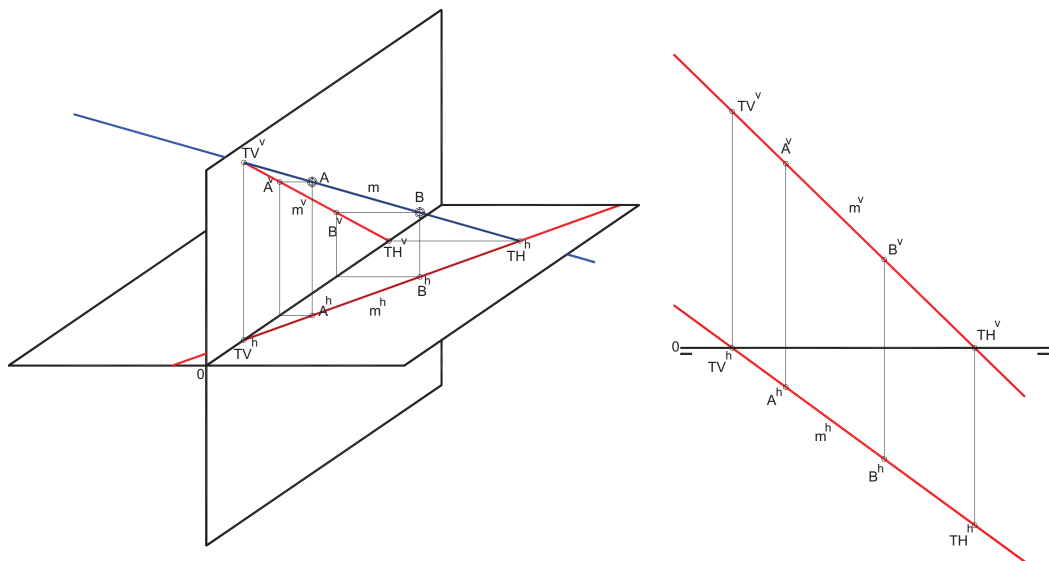


Fig. 1.8: Trazas de una recta.

Nótese cómo los puntos de traza marcan un cambio de región de la recta "m". En el ejemplo, a la izquierda de TV "m" se encuentra la segunda región; entre TV y TH, la recta está en la primera región y a la derecha de TH, "m" se sitúa en la cuarta región del espacio.

1.5.2 Posición de la recta

La recta es un elemento geométrico único que adopta distintas posiciones en el espacio con relación al sistema de referencia, es decir, con respecto a los planos de proyección del

sistema diédrico. Se denomina α al ángulo que se forma entre la recta y el plano horizontal y β al formado con el plano vertical.

De acuerdo con los valores que pueden tomar los ángulos α y β es posible asignar nombres a las posiciones que adopta la recta. Estas posiciones se denominan notables cuando forma ángulos de cero o noventa grados con respecto a los planos de proyección, vale decir, cuando es paralela o perpendicular a uno de ellos. En el primer caso, un segmento de recta de determinada longitud se proyecta como otro segmento de igual tamaño, en tanto que en el segundo caso, se proyecta como un punto, ya que los rayos proyectantes correspondientes a cada uno de los infinitos puntos de la recta se confunden en uno solo.

1.5.2.1 Recta en posición paralela al plano horizontal

El ángulo formado con el plano horizontal (α) es, obviamente, igual a cero. La intersección de la recta con este plano (TH) es un punto impropio, o lo que es lo mismo, está en el infinito (Fig. 1.9). Dependiendo del valor del ángulo formado por la recta con respecto al plano vertical, se obtienen los siguientes casos:

- **Recta de Punta**: En esta situación, la recta forma un ángulo con PV $\beta = 90°$, por lo que su proyección vertical (a^v) se reduce a un punto. La proyección horizontal de la recta (a^h) es otra recta, la cual es perpendicular a la línea de tierra y se presenta en *Verdadero Tamaño,* ya que un segmento AB en esta posición se proyecta en A^hB^h con su misma longitud.

- **Recta Paralela a la Línea de Tierra**: En este caso particular, la recta es paralela a ambos planos de proyección, por lo que $\beta = 0$. Se representa en ambas proyecciones como rectas paralelas a la línea de tierra y en Verdadero Tamaño. Ambos puntos de traza (TV y TH) resultan ser puntos impropios.

- **Recta Horizontal**: La recta en esta posición, es oblicua con respecto a PV, vale decir, $0<\beta<90°$. Como consecuencia, la proyección vertical (c^v) es una recta paralela a la línea de tierra cuya longitud es menor con relación a la magnitud de la recta en el espacio (c), en una proporción igual al coseno del ángulo β. La proyección horizontal (c^h) refleja el Verdadero Tamaño y es una recta inclinada con respecto a la línea de tierra; el valor de este ángulo es el mismo valor de β.

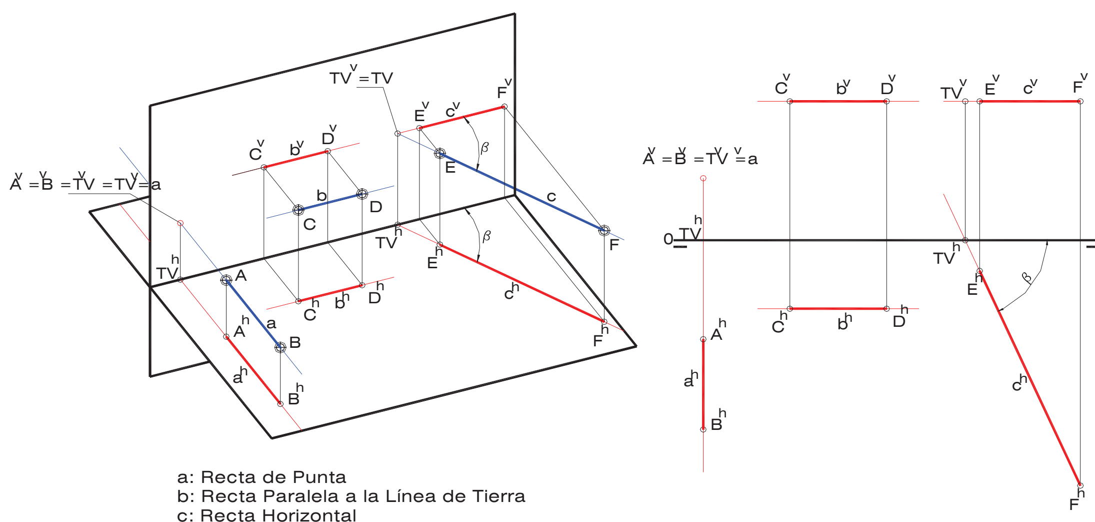


Fig. 1.9: Recta en posición paralela al Plano Horizontal

1.5.2.2 Recta en posición paralela al Plano Vertical

El ángulo formado con el plano vertical (β) es igual a cero. La intersección de la recta con este plano (TV) es un punto impropio, o lo que es lo mismo, está en el infinito (Fig. 1.10). Dependiendo del valor del ángulo formado por la recta con respecto al plano horizontal, se presentan los siguientes casos:

- **Recta de Pié**: En esta situación, la recta forma un ángulo con PH $\alpha = 90°$, por lo que su proyección horizontal (d^h) se reduce a un punto. La proyección vertical de la recta (d^v) es otra recta, la cual es perpendicular a la línea de tierra y se presenta en *Verdadero Tamaño,* ya que un segmento GH en esta posición se proyecta en G^vH^v con su misma longitud.

- **Recta Paralela a la Línea de Tierra**: Dedo que en esta posición la recta también es paralela a PH, se trató en el numeral 1.5.2.1.

- **Recta Frontal**: La recta en esta posición, es oblicua con respecto a PH, vale decir, $0<\alpha<90°$. Como consecuencia, la proyección horizontal (e^h) es una recta paralela a la línea de tierra cuya longitud es menor con relación a la magnitud de la recta en el espacio (e), en una proporción igual al coseno del ángulo α. La proyección vertical (e^v) refleja el Verdadero Tamaño y es una recta inclinada con respecto a la línea de tierra; el valor de este ángulo de inclinación es el mismo valor de α.

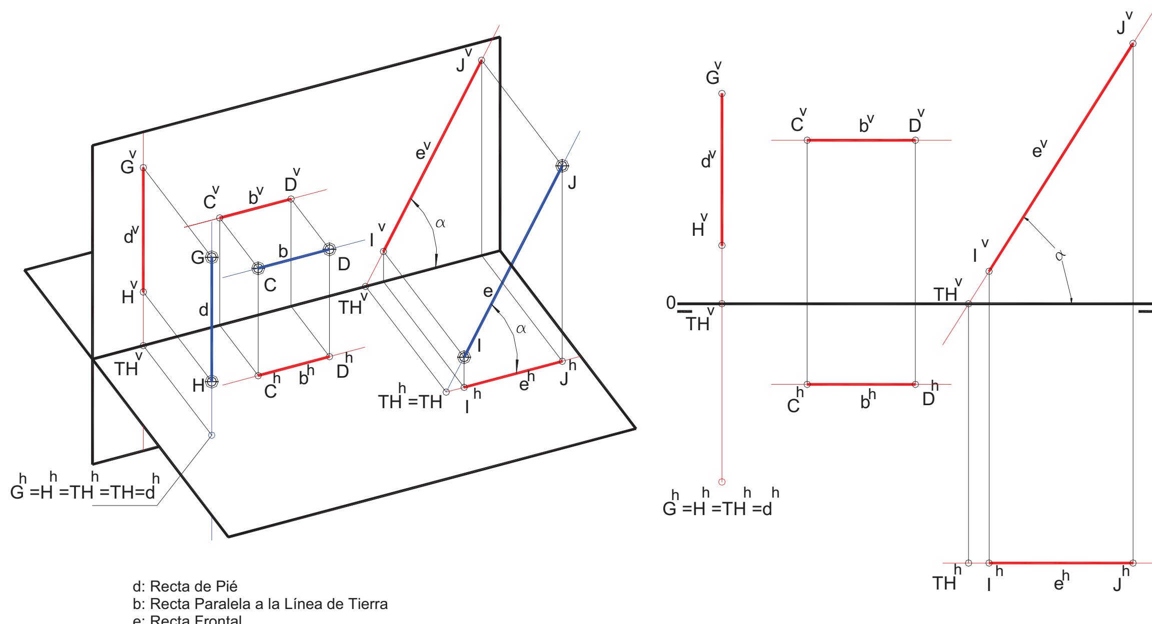


Fig. 1.10: Recta en posición paralela al Plano Vertical.

1.5.2.3 Recta en posición oblicua con respecto a los planos de proyección

En este caso los valores que adoptan los ángulos α y β son distintos de cero y de noventa grados. Esto trae como consecuencia que ninguna de las proyecciones diédricas reflejan el Verdadero Tamaño de un determinado segmento de recta en esta posición; de igual manera, los propios valores de α y β aparecen distorsionados. Ante esta realidad, se hace necesario aplicar un método auxiliar que permita determinar los valores angulares y el Verdadero Tamaño, bien mediante el cambio de posición del segmento de recta objeto de

estudio, bien mediante la introducción de nuevas proyecciones cilíndricas ortogonales (Fig. 1.11 y 1.12). En general, existen dos casos de recta en posición oblicua, originados por la consideración de un tercer plano de proyección: el plano coordenado XZ o uno paralelo a él.

- **Recta de Perfil**: En esta posición, la recta forma ángulos distintos de cero y noventa grados con los planos de proyección vertical y horizontal, pero es paralela al plano coordenado XZ (Plano Lateral), por lo que se cumple que

$$\alpha + \beta = 90$$

El Verdadero Tamaño de un segmento de recta en esta posición se refleja en una proyección auxiliar, la cual se hace sobre un plano cualquiera paralelo al plano coordenado XZ y, por lo tanto, perpendicular a LT. Como este plano auxiliar se proyecta como líneas rectas en los planos de proyección principales, será necesario abatirlo sobre uno de ellos para lograr "ver" la proyección lateral resultante. El abatimiento se realiza comúnmente en torno a la intersección entre PV y el plano lateral auxiliar mediante un giro de 90°.

El procedimiento para encontrar esa *proyección lateral* partiendo de las proyecciones diédricas, es el siguiente (Fig. 1.11):
Se comienza ubicando a cualquier distancia del origen de coordenadas – preferiblemente a la derecha de las proyecciones de la recta de perfil – un plano lateral, el cual se representa por líneas que forman ángulo recto con la línea de tierra, las cuales se cortan sobre ella en el punto *R.* Enseguida se trazan por las proyecciones horizontales de los puntos que definen al segmento de recta líneas de referencia paralelas a LT y que cortan a la proyección horizontal del plano lateral auxiliar en 1 y 2.

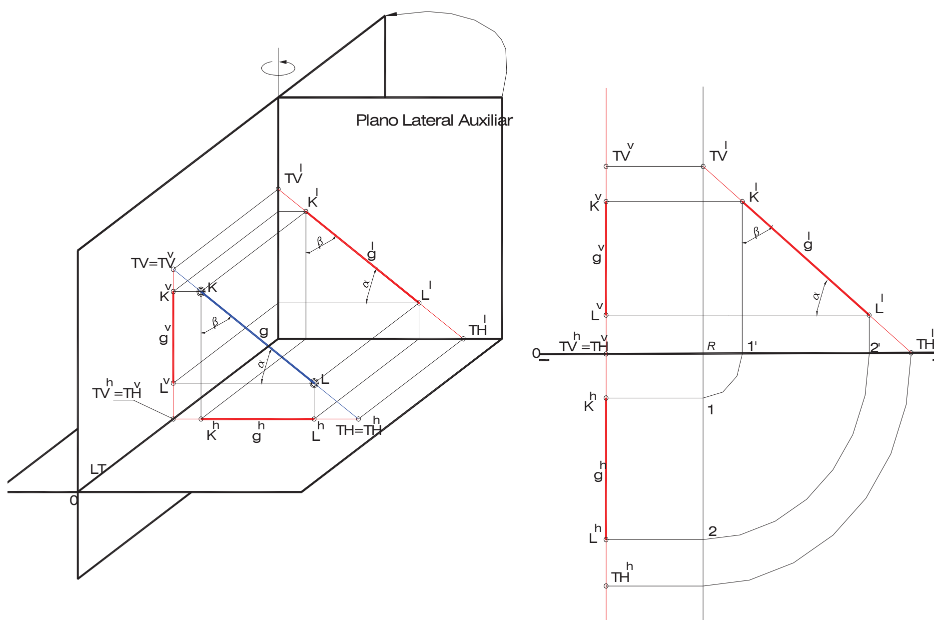


Fig. 1.11: Recta de Perfil.

Luego, con centro en *R* y radios *R*1 y *R*2 se dibujan cuartos de circunferencia que definen sobre la línea de tierra a los puntos 1' y 2'. Si se levantan perpendiculares a LT por 1' y 2', y paralelas a LT por las proyecciones verticales de los puntos que definen al segmento de recta, se obtienen, en los cortes correspondientes, las proyecciones laterales abatidas de estos puntos, y, en consecuencia, la proyección lateral abatida de la recta de perfil (Fig. 1.11).

La proyección lateral permite también la determinación de las trazas de la recta: el corte entre la proyección lateral de la recta y la proyección vertical del plano lateral define a TV^l (proyección lateral de la traza vertical), en tanto que el corte entre al proyección lateral de la recta de perfil y LT define a TH^l. Una vez obtenidas estas proyecciones laterales se procede a determinar las proyecciones diédricas de los puntos de traza, aplicando el procedimiento descrito anteriormente en forma inversa y recordando los conceptos de los puntos de traza.

- **Recta Oblicua, en Posición Accidental o en Posición Cualquiera**: En esta posición, la recta forma ángulos distintos de cero y noventa grados con los tres planos coordenados, es decir, no es paralela a PV, PH ni PL, por lo que el verdadero tamaño de un segmento de recta en estas condiciones no se refleja ni en las proyecciones diédricas ni en la proyección lateral. Por lo anterior se cumple que

$$\alpha + \beta < 90$$

ya que los planos de proyección PV y PH forman entre sí 90°. Si se asocia una recta con la trayectoria ideal de un móvil, si se supone ese movimiento de izquierda a derecha, y se considera al observador en la primera región del espacio, puede entonces hablarse de cuatro situaciones generales para la recta en posición accidental: Ascendente hacia adelante (Fig. 1.12-a), Ascendente hacia atrás (Fig. 1.12-b), Descendente hacia adelante (Fig. 1.12-c), Descendente hacia atrás (Fig. 1.12-d).

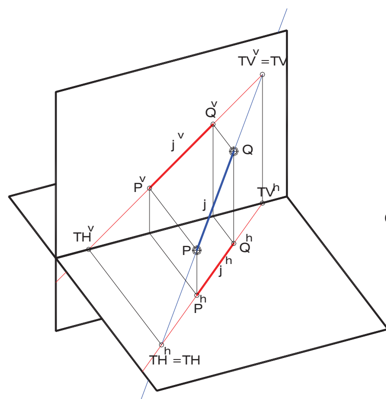
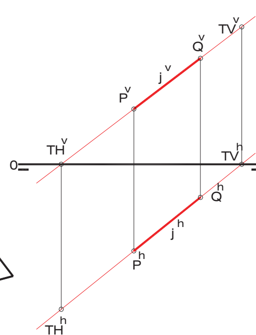



Fig. 1.12-a: Recta Oblicua Ascendente hacia delante.

Fig. 1.12-b: Recta Oblicua Ascendente hacia atrás.

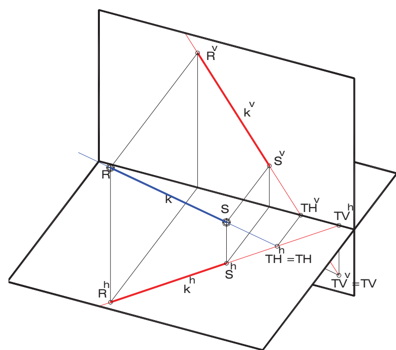
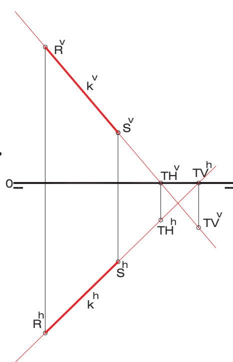



Fig. 1.12-c: Recta Oblicua Descendente hacia delante.

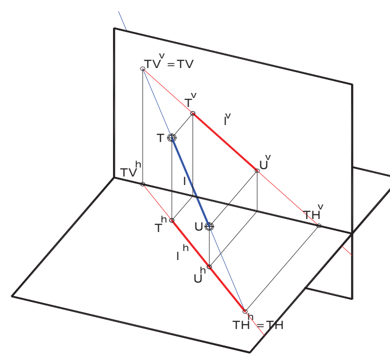


Fig. 1.12-d: Recta Oblicua Descendente hacia atrás.

1.5.3 Métodos utilizados en la determinación del Verdadero Tamaño de segmentos de recta

Como ya se ha indicado, los segmentos de recta en posición oblicua no reflejan en las proyecciones diédricas su Verdadero Tamaño. Lo mismo ocurre con los valores angulares α y β. Por tal motivo, es absolutamente necesaria la aplicación de métodos que permitan la resolución de los siguientes tipos de problema:

- Dado un segmento en posición oblicua, determinar su Verdadero Tamaño y los valores de α y β.

- Determinar un punto P sobre una recta en posición oblicua, teniendo como referencia la distancia que hay entre P y cualquier otro punto de la recta.
- Construir las proyecciones de una recta si se conocen el Verdadero Tamaño de un segmento sobre ella, y los valores α y β.

Los métodos comúnmente empleados para lograr el objetivo planteado son los siguientes:

1. Abatimiento
2. Giro
3. Introducción de nuevos planos de proyección

1. **Abatimiento:** Consiste en la rotación de un segmento de recta en torno a un eje paralelo a uno de los planos de proyección (eje de abatimiento) hasta lograr que adopte una posición favorable, es decir, una en la que su Verdadero Tamaño se proyecte sobre alguno de los planos de proyección.

Sea un segmento AB – el cual define una recta “a” - en posición oblicua (Fig. 1.13-a). Si se traza una recta paralela a la proyección horizontal del segmento por su extremo de menor cota (A), se genera un triángulo rectángulo denominado *triángulo de abatimiento.* Su hipotenusa es el segmento AB en el espacio (Verdadero Tamaño), el ángulo formado entre ella y la recta paralela a la proyección horizontal de AB es α y el cateto opuesto a este ángulo es un segmento perpendicular a PH de longitud igual a la diferencia entre las cotas de A y B ($\Delta Z_{AB} = |Z_B - Z_A|$). Ahora bien, si el triángulo rota un ángulo de 90° en torno al cateto adyacente al ángulo α (eje de abatimiento), adopta una posición de paralelismo con respecto a PH, por lo que, si se proyecta el triángulo sobre este plano de proyección, se obtiene el Verdadero Tamaño (VT) del segmento AB y el valor real de α. La proyección del punto B’ (nueva posición del punto B) se denota por B^R (B abatido).

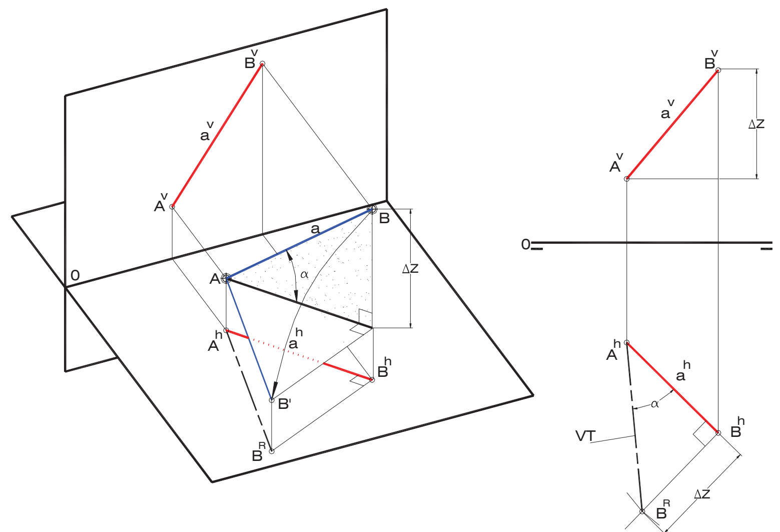


Fig. 1.13-a: Triángulo de Abatimiento

En la representación diédrica se procede de la siguiente manera: se traza por la proyección vertical del extremo del segmento de menor cota (A^v) una paralela a LT, que al cortar la referencia del otro extremo define la diferencia de cota. Enseguida se copia el valor de esta diferencia – usando el compás – sobre una perpendicular a la proyección horizontal del segmento de recta, trazada por la icnografía (proyección horizontal) del extremo de mayor cota (B), lo que resulta en el punto B^R. Luego, el segmento definido por B^R y la proyección horizontal del otro extremo (A^h) es la hipotenusa del triángulo de abatimiento, cuya longitud es el Verdadero Tamaño (VT) del segmento AB. Finalmente, el ángulo formado entre el Verdadero Tamaño del segmento y su proyección horizontal tiene el mismo valor del ángulo α, formado entre la dirección “a” – definida por A y B – y el plano horizontal.

Del mismo modo, es posible generar un triángulo de abatimiento que permita la visualización del Verdadero Tamaño del segmento AB y del valor real del ángulo formado entre la dirección "a" y PV, es decir, β.

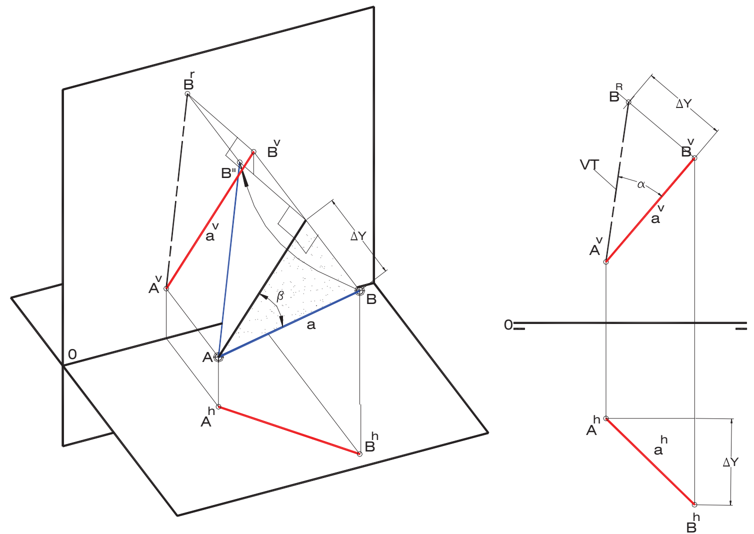


Fig. 1.13-b: Triángulo de Abatimiento

Su construcción se lleva acabo ubicando una paralela a la proyección vertical del segmento AB, en el punto de menor vuelo (A), siendo su hipotenusa el segmento AB en el espacio, β es el ángulo formado entre AB y la paralela a la proyección vertical y el cateto opuesto a β tiene un tamaño igual a la diferencia entre los vuelos de A y B ($\Delta Y_{AB} = |Y_B - Y_A|$) (Fig. 1.13-b).

Mediante un movimiento de rotación de 90° en torno a la recta paralela a la proyección vertical del segmento, el triángulo de abatimiento llega a ser paralelo al PV, por lo que, si se proyecta sobre este plano en la nueva posición, se obtiene que el segmento definido por B^R y A^v es el Verdadero Tamaño de AB, en tanto que el ángulo formado entre ese Verdadero Tamaño y la proyección vertical del segmento tiene el mismo valor que el ángulo β.

La construcción de este segundo triángulo de abatimiento en el sistema diédrico es análoga a la del primero, y es fácilmente deducible de la Fig. 1.13-b.

2. **Giro:** Al igual que el Abatimiento, el Giro se fundamenta en la rotación de un segmento de recta en posición oblicua en torno a una recta paralela a uno de los planos de proyección. La diferencia entre ambos métodos radica en que el giro se realiza en torno a rectas de pié o de punta (eje de giro), lo que implica que el ángulo de rotación o giro sea de noventa grados únicamente si se trata de segmentos de recta en posición de perfil. La rotación se realiza hasta conseguir que el segmento oblicuo adopte una posición horizontal (eje de punta) o frontal (eje de pié).

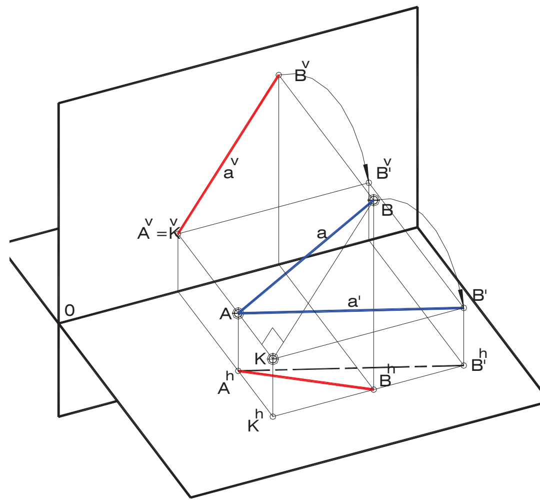
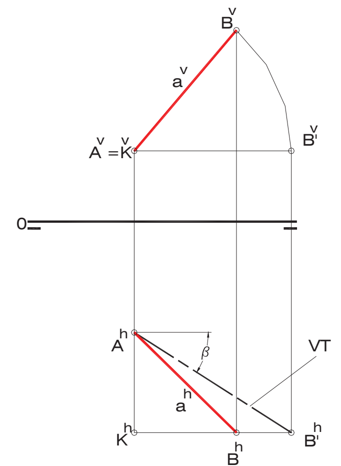
   Con el fin de simplificar el procedimiento, se selecciona un eje de giro que tenga un punto común con el segmento de recta objeto de estudio y se hace, además, coincidir ese punto con uno de los extremos de dicho segmento.

   Sea un segmento AB – el cual define una recta "a" - en posición oblicua. Considérese una recta de punta que pasa por el punto A como eje de giro. El radio de giro será el segmento KB. La rotación del punto B en torno a ese eje se realiza en un plano paralelo a PV, por lo que la trayectoria de B se proyecta en el plano vertical como una circunferencia de radio A^v B^v.

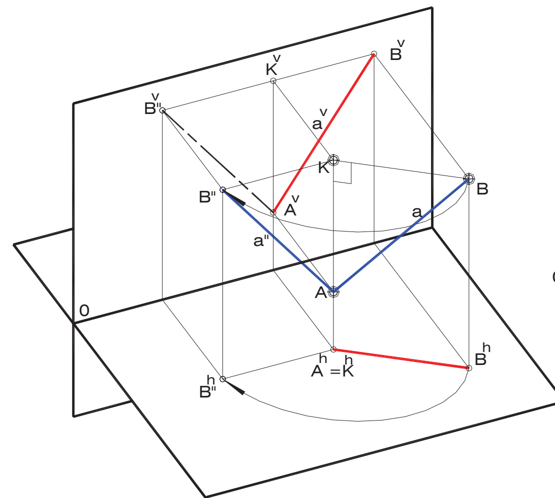
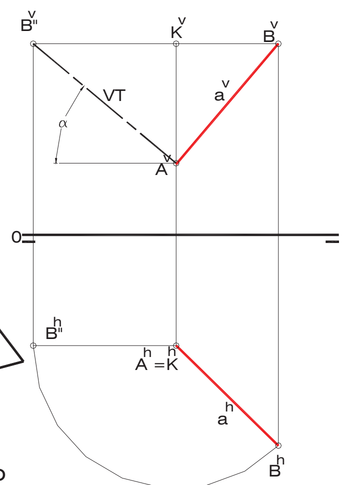
   Como se quiere llevar el segmento a una posición horizontal, el corte de esa circunferencia con una paralela a la línea de tierra trazada por la proyección vertical del centro de giro, da como resultado la nueva proyección vertical de B (B'^v), como se muestra en la Fig. 1.14-a.

Considerando que el giro de B se realiza en un plano paralelo a PV, es evidente que su vuelo permanece invariable, por lo que, en el corte de una paralela a LT trazada por B^h con una perpendicular a LT trazada por B'^v, se obtiene la proyección horizontal del punto B en su nueva posición (B'^h).

Claro está que al aplicarse el giro del segmento AB como se ha indicado, el ángulo que forma con el plano vertical ha permanecido constante; así, en las proyecciones diédricas, el ángulo β de la recta definida por A y B es igual al formado entre la nueva proyección horizontal del segmento y la línea de tierra, ya que en la nueva posición la recta es horizontal. Por esta misma razón, el segmento A^h B'^h constituye el Verdadero Tamaño del segmento AB.

1.14-a

1.14-b

Fig. 1.14: Giro de un segmento de recta

Análogamente, el giro del segmento oblicuo en torno a un eje de pié se realiza en un plano paralelo a PH. Supóngase que el eje de giro pasa por A (Fig. 1.14-b); el vuelo de B permanece constante en el movimiento, así como también es constante el ángulo formado entre la recta y el plano horizontal, es decir, α. En la segunda posición, el segmento AB'' es frontal, por lo tanto, su Verdadero Tamaño se proyecta sobre PV según el segmento $A^vB''^v$.

Finalmente, el ángulo formado entre A^v B''^v y la línea de tierra tiene el mismo valor que el ángulo α que la dirección de recta "a", definida por A y B, forma con el plano vertical de proyección.

El procedimiento en la representación diédrica del giro de un segmento en torno a un eje de pié es análogo al aplicado cuando el eje es de punta.

3. **Introducción de nuevos planos de proyección (Cambio de Plano):** A diferencia de los dos métodos expuestos anteriormente, no se fundamenta en el cambio de posición del segmento de recta oblicuo, objeto de estudio. Este método se basa en el cambio de posición de uno de los observadores virtuales y de la dirección de los rayos proyectantes correspondientes. Este movimiento genera un nuevo plano de proyección, el cual deberá ser – evidentemente - paralelo a la recta oblicua objeto de estudio, de tal forma que ésta se proyectará en verdadero tamaño sobre el mencionado plano.

   Sea AB un segmento que define a la recta “a” en posición oblicua (Fig. 1.15-a). Si se introduce un nuevo plano de proyección horizontal PH2 que sea paralelo a la recta “a” y perpendicular al plano vertical, se genera un segundo sistema de proyección, en el que los puntos A y B se proyectan en A^2 y B^2. Nótese cómo la segunda línea de tierra LT2 debe ser paralela a la proyección vertical del segmento AB, ya que el nuevo plano horizontal de proyección es paralelo a la recta AB en el espacio.

   En la nueva proyección (A^2B^2), el segmento AB se encuentra en Verdadero Tamaño, y, como en el sistema constituido por los planos de proyección PV y PH2 la recta “a” está en posición horizontal, el ángulo formado entre la proyección A^2B^2 y LT2 es el ángulo β de la recta “a”, puesto que dicha recta no ha variado su posición relativa con respecto a PV.

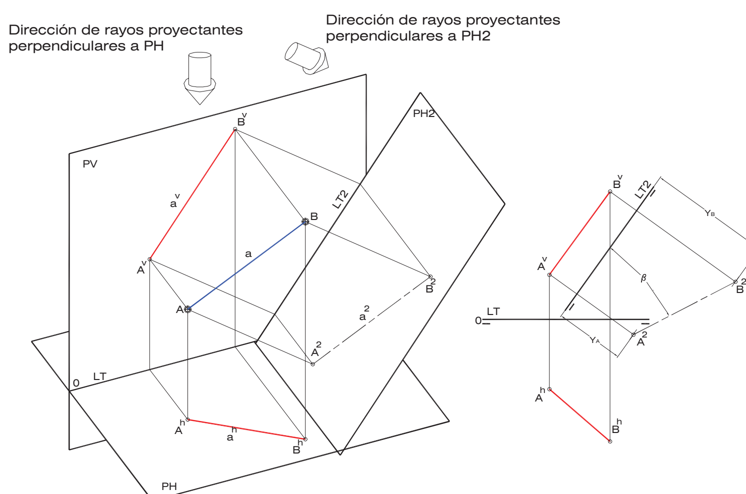


Fig. 1.15-a: Introducción de un nuevo plano horizontal de proyección.

   El procedimiento en la representación diédrica comienza por el trazado de la nueva línea de tierra LT2, paralela a la proyección horizontal de AB y a cualquier distancia de este segmento. Seguidamente se trazan por A^h y B^h líneas de referencia perpendiculares a LT2. Como los sistemas LT y LT2 comparten el mismo plano vertical, el vuelo de los puntos A y B es el mismo, así, determinamos las nuevas proyecciones de A y de B copiando las distancias de A^h y B^h a LT sobre las referencias perpendiculares a LT2 y a partir de ella.

   Es importante señalar que si el vuelo de uno de los puntos es negativo en el sistema LT se mantendrá negativo en el sistema LT2, pues, como ya se ha dicho, ambos comparten el mismo plano vertical de proyección.

   Considérese ahora un nuevo plano vertical PV2, perpendicular a PH, paralelo a la recta “a” y a cualquier distancia de ella; la intersección de PV2 con PH resulta en una nueva línea de tierra LT3 que es paralela a la proyección vertical de la recta “a”. Las

proyecciones ortogonales de A y B sobre el nuevo plano reflejan el verdadero tamaño del segmento AB, por la posición frontal que éste tiene en el sistema diédrico definido por PH y PV2; por esa misma razón, el ángulo formado entre A^3B^3 y LT3 tiene el mismo valor del ángulo α de la recta "a". Finalmente, como el plano horizontal es común para los sistemas LT y LT3, la cota de los puntos A y B no varía de un sistema a otro. El trazado en diédrico en este caso es análogo al anterior (Fig. 1.15-b).

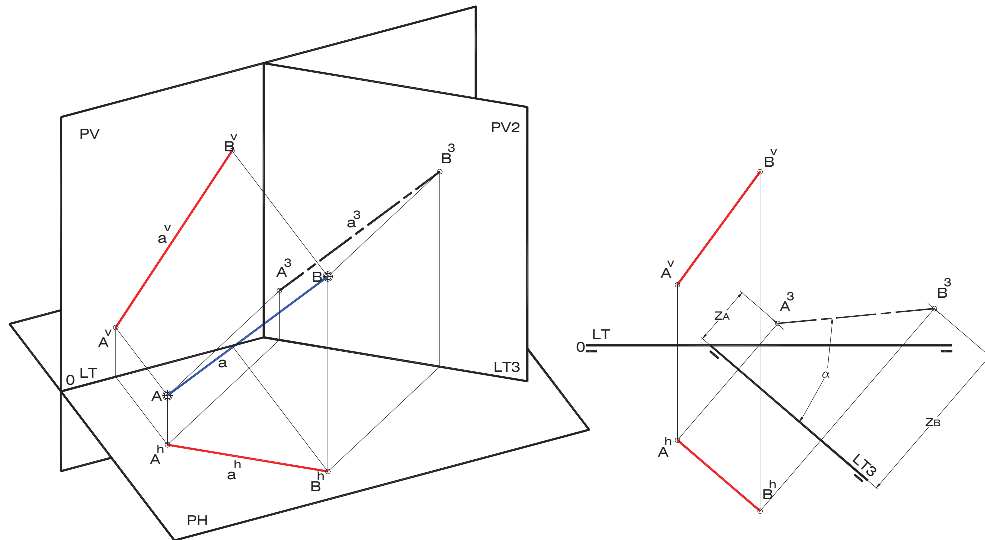


Fig. 1.15-b: Introducción de un nuevo plano vertical de proyección.

1.5.4 Aplicaciones de los triángulos de abatimiento

Cuando se quiere determinar las proyecciones de diédricas de un segmento de recta – en posición oblicua - a partir de datos como el Verdadero Tamaño y los ángulos que forma con los planos de proyección, es útil utilizar los triángulos de abatimiento, puesto que en ellos se encuentran todas las variables mencionadas relacionadas de manera precisa con las proyecciones hechas sobre PV y PH. El conocimiento de dichos triángulos y la habilidad para utilizarlos garantizan la resolución de cualquier problema de este tipo.

En general, es posible establecer los siguientes casos típicos:

1. **Determinar un segmento de recta conocida una proyección y el Verdadero Tamaño.**

   Sea un segmento de recta AB y supóngase que se conoce el punto A y sólo una de las proyecciones de B, la horizontal por ejemplo. Además, el Verdadero Tamaño de AB es también conocido.

   Como se conocen los valores de vuelo de ambos extremos (A y B) es posible determinar la diferencia de vuelo entre ellos; por otra parte el triángulo de abatimiento formado por VT, proyección vertical (la incógnita) y diferencia de vuelo se puede construir siempre que se conozcan dos de sus lados, dado que es rectángulo.

   Así, el tamaño de la proyección vertical de AB será el cateto "pv" de un triángulo rectángulo, que tiene por hipotenusa el Verdadero Tamaño de AB y el otro cateto de tamaño igual a la diferencia de vuelo (ΔY) entre A y B.

Finalmente, haciendo centro en la proyección vertical de A y con radio igual al tamaño de la proyección vertical de AB, se traza un arco que, al cortar la referencia del punto B, define la proyección vertical de este punto (Fig. 1.16-a).

Este problema puede tener dos soluciones, como se aprecia en la Fig. 1.16-a, una solución o ninguna solución. La primera situación se obtiene si la suma de los ángulos α y β del segmento AB es menor que 90; la segunda situación corresponde a una recta en posición horizontal (arco tangente a la línea de referencia del punto B) en cuyo caso la suma de α y β resulta ser igual a 90; finalmente, no existe solución posible si esa suma es mayor que 90, lo que en el ejemplo se traduce en un tamaño de proyección vertical menor que la diferencia de coordenadas X entre los puntos A y B.

Por otra parte, este ejercicio puede ser resuelto aplicando giro en torno a un eje de pié (o de punta). Para ello se procede dibujando un arco de centro en la proyección horizontal del punto A y de radio igual a A^hB^h, el cual corta a una paralela a LT trazada por A^h en el punto B'^h, proyección horizontal del punto B en la segunda posición (después del giro). Seguidamente, se construye un arco de centro en A^v y radio igual al verdadero tamaño del segmento AB; el punto de corte entre dicho arco y la referencia perpendicular a LT correspondiente a B', viene a ser la proyección vertical de B'. Luego si se traza por B'^v una paralela a LT se obtiene, en el corte con la referencia correspondiente al punto B, la proyección faltante de éste punto, es decir, B^v (Fig. 1.16-b).

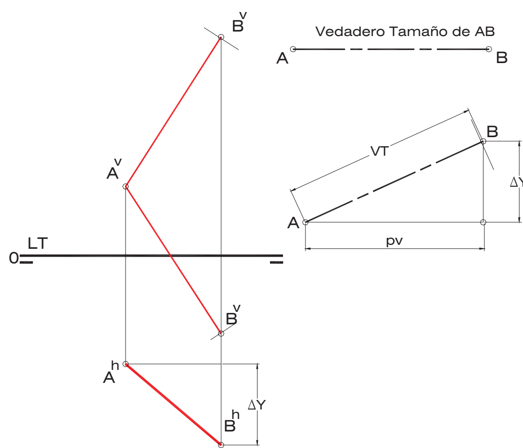


Fig. 1.16-a

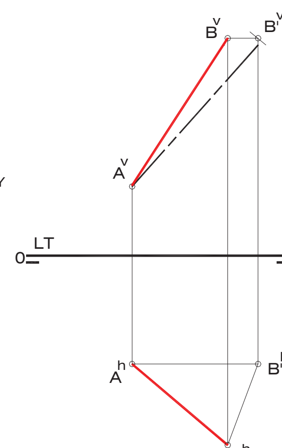


Fig. 1.16-b

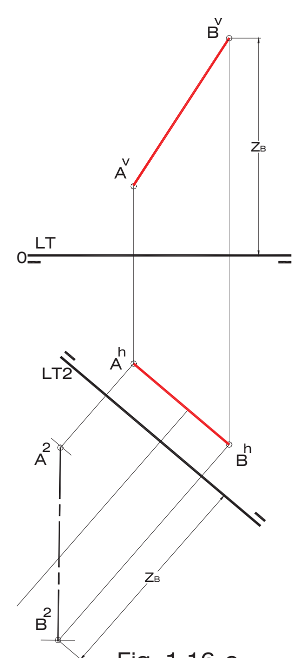


Fig. 1.16-c

Si se introduce un nuevo plano de proyección (Fig. 1.16-c) es también posible resolver el problema. Dado que se conoce la proyección horizontal del segmento AB y la proyección vertical de uno de sus extremos (A), resulta evidente la posibilidad de crear un nuevo plano de proyección vertical paralelo al segmento AB, lo cual se traduce en una línea de tierra LT2 paralela a la proyección horizontal de dicho segmento. Una vez hallada la proyección auxiliar (A^2) del punto A, se construye un arco de centro en este punto y radio igual al verdadero tamaño de AB; el punto de corte entre dicho arco y la referencia perpendicular a LT2 correspondiente al punto B

es la proyección auxiliar B^2 de este punto. Finalmente se determina su proyección vertical recordando que la cota de B es igual en los sistemas LT y LT2.

2. **Determinar un segmento de recta conocida una proyección y el ángulo formado entre la recta y la proyección desconocida.**

Sea un segmento de recta AB y supóngase que se conoce el punto A y sólo una de las proyecciones de B, la vertical por ejemplo. Además, el valor del ángulo que forma la recta con la proyección desconocida, es decir, α, es también conocido.

Como se conocen los valores de cota de ambos extremos (A y B) es posible determinar la diferencia de cota entre ellos; por otra parte el triángulo de abatimiento formado por VT, proyección horizontal (la incógnita) y diferencia de cota se puede construir siempre que se conozcan el ángulo α y uno de sus lados, puesto que es rectángulo.

Si se dibuja un triángulo rectángulo con un ángulo interno igual a α y de cateto opuesto a ese ángulo igual a la diferencia de cota entre A y B (ΔZ), se obtiene que el cateto adyacente a α es la proyección horizontal del segmento (ph). Finalmente, haciendo centro en la proyección horizontal de A y con radio igual al tamaño de la proyección horizontal de AB, se traza un arco que, al cortar la referencia del punto B, define la proyección horizontal de este punto (Fig. 1.17-a).

Al igual que en el caso número uno y por las mismas razones, es posible obtener dos soluciones, tal y como se muestra en la Fig. 17-a, una solución o ninguna solución.

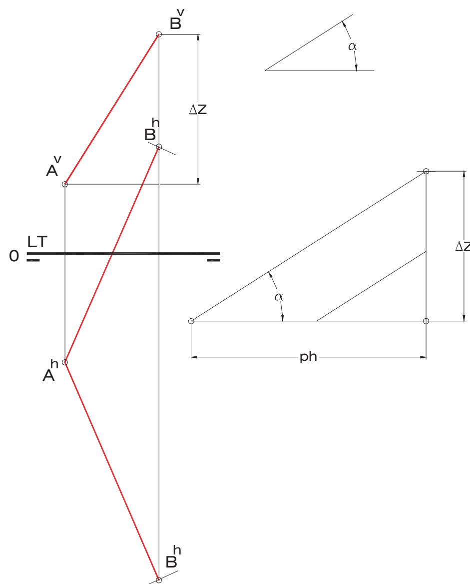


Fig. 1.17-a

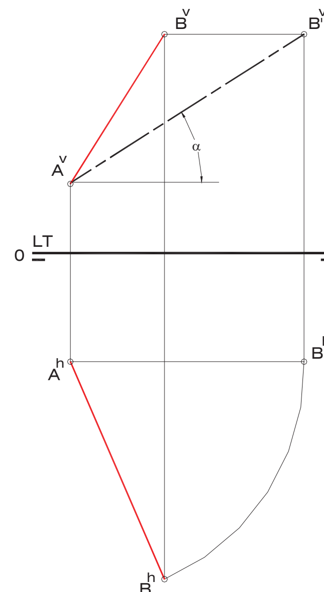


Fig. 1.17-b

Para hallar la solución de este ejercicio aplicando giro (Fig. 1.17-b) es necesario realizar el movimiento de rotación en torno a un eje de pié, ya que el ángulo conocido es el que forma el segmento AB con el plano horizontal de proyección. En primer lugar se dibuja por A^v una recta que forme α grados con LT correspondiente a la proyección vertical de la recta luego del giro; el punto de corte entre esta recta y una paralela a LT trazada por A^v viene a ser B'^v. Luego, en vista de que la recta AB' es

frontal, la proyección horizontal de B' se halla en una paralela a LT trazada por A^h. Por último, se traza una arco de centro en la proyección horizontal de A y radio igual al segmento $A^hB'^h$, el cual corta a la referencia perpendicular a LT que corresponde al punto B en B^h.

Resulta imposible determinar la solución (o soluciones) de este ejercicio mediante la introducción de un nuevo plano de proyección, ya que el ángulo conocido es el que forma la recta con la proyección desconocida.

3. **Determinar un segmento de recta conocida una proyección y el ángulo formado entre la recta y la proyección dada.**

Sea un segmento de recta AB y supóngase que se conoce el punto A y sólo una de las proyecciones de B, la vertical por ejemplo. Además, el valor del ángulo que forma la recta con la proyección dada, es decir, β, es también conocido. La proyección vertical del segmento AB es el cateto adyacente al ángulo β del triángulo de abatimiento, en tanto que el cateto opuesto es la diferencia de vuelo entre los puntos extremos del segmento.

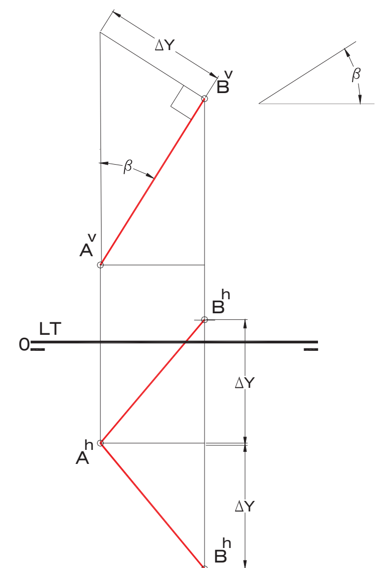


Fig. 1.18-a

Si por la proyección vertical (dada) de cualquiera de los puntos extremos del segmento de recta, se traza una línea que forme un ángulo β con la proyección vertical del segmento, y si por el otro extremo de ésta se levanta una perpendicular a ella, se obtiene, el valor de la diferencia entre los vuelos de A y B.

Finalmente, el tamaño de ΔY se consigna sobre la referencia del punto B, por delante o por detrás del nivel de vuelo del punto A, obteniéndose así la proyección horizontal del punto B. Es evidente que existen dos posibles soluciones, tal y como se muestra en la Fig. 1.18-a.

Aplicando giro del segmento AB en torno a una eje de punta es también posible hallar la solución del problema. El procedimiento se inicia con el trazado de un arco de centro en A^v y radio igual a la proyección vertical de AB, el cual corta a una paralela a LT trazada por A^v en el punto B'^v. A continuación, se construye por A^h una recta que forme β grados con la línea de tierra, recta ésta que viene a ser la proyección horizontal del segmento AB', el cual tiene una posición horizontal. Finalmente, se traza por B'^h una paralela a LT que corta a la referencia correspondiente al punto B en la proyección horizontal de este punto (Fig. 1.18-b).

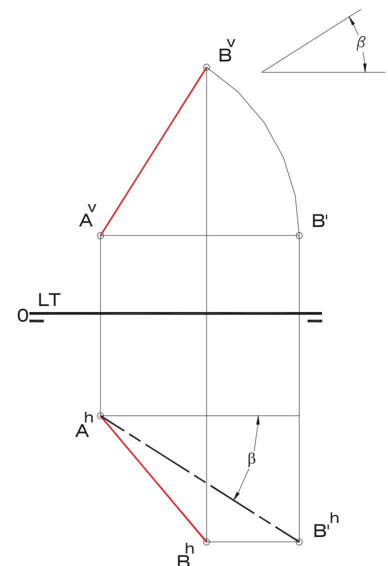


Fig. 1.18-b

De igual manera, la solución del problema se obtiene si se introduce un nuevo plano de proyección horizontal paralelo al segmento AB, generándose así un nuevo sistema

de proyección cuya línea de tierra LT2 debe ser paralela a la proyección vertical de AB, y en el cual éste segmento tiene una posición horizontal. Trazando por A^2 una línea que forme β grados con LT2 se obtiene, en el corte con la referencia perpendicular a LT2 que pasa por B^v, la proyección auxiliar de B. Luego, sabiendo que la cota del punto B es igual en los sistemas LT y LT2, es fácil hallar la proyección horizontal del punto B (Fig. 18-c).

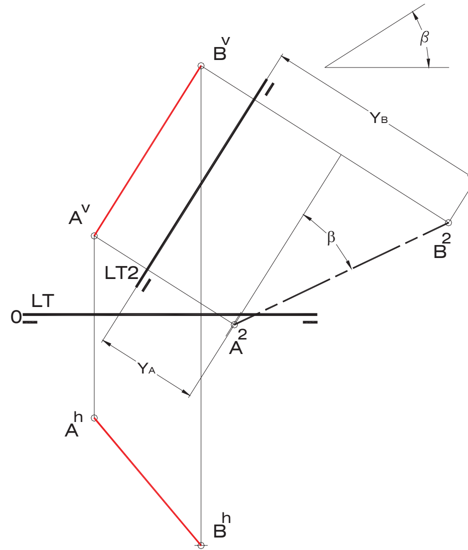


Fig. 1.18-c

4. **Determinar un segmento de recta conocido el Verdadero Tamaño y el valor de α y β.**

Sea un segmento de recta AB y supóngase que se conoce el punto A y ninguna de las proyecciones de B. Además, se conocen los valores angulares α y β.

Como para un mismo segmento AB ambos triángulos de abatimiento tienen en común la hipotenusa (VT), y como se conocen ambos ángulos con los planos de proyección, es necesario construir los dos polígonos. Se parte de la construcción de una circunferencia de diámetro VT, en la cual se inscriben los triángulos de abatimiento (recuérdese que ambos triángulos son rectángulos y que el *arco capaz* de 90° es una semicircunferencia[1]), trazando desde uno de los extremos del diámetro VT líneas que formen ángulos α y β con éste. Luego, los cortes de las líneas trazadas se unen con el otro extremo del diámetro VT.

De la construcción anterior se obtienen los valores de ambas proyecciones del segmento AB y de las diferencias de cota y vuelo entre esos dos puntos (Fig. 1.19-a)

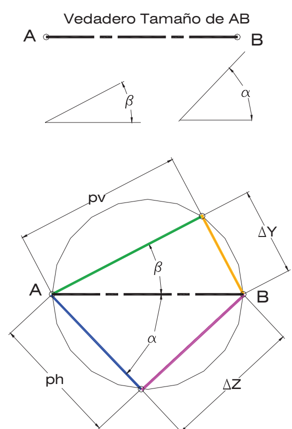


Fig. 1.19-a

[1]De acuerdo con Puig Adam (Curso de Geometría Métrica, Tomo I. Editorial Biblioteca Matemática. Madrid 1973), el arco capaz de un ángulo α sobre un segmento AB es el lugar geométrico formado por los vértices de los ángulos iguales a α y cuyos lados pasan por los puntos A y B.

El traslado de esos valores a la representación diédrica se realiza de la siguiente forma: Se construye una circunferencia de centro en A^v y radio igual a "pv" y una circunferencia de centro en A^h y radio igual a "ph". Seguidamente se consigna el tamaño de ∆Z por arriba y por debajo del nivel de cota de A y sobre su referencia, y se trazan líneas paralelas a LT por los puntos así obtenidos. Luego, se consigna el valor de ∆Y por delante y por detrás del nivel de vuelo A y sobre su referencia, trazando enseguida líneas paralelas a LT por los puntos resultantes.

Los cortes entre la circunferencia de centro en A^v y las paralelas a LT situadas a una distancia igual a ∆Z de esa proyección, son las cuatro posibles soluciones para B^v; del mismo modo, los puntos comunes a la circunferencia de centro en A^h y a las paralelas a LT situadas a una distancia igual a ∆Y de esa proyección, definen cuatro posibles soluciones para B^h.

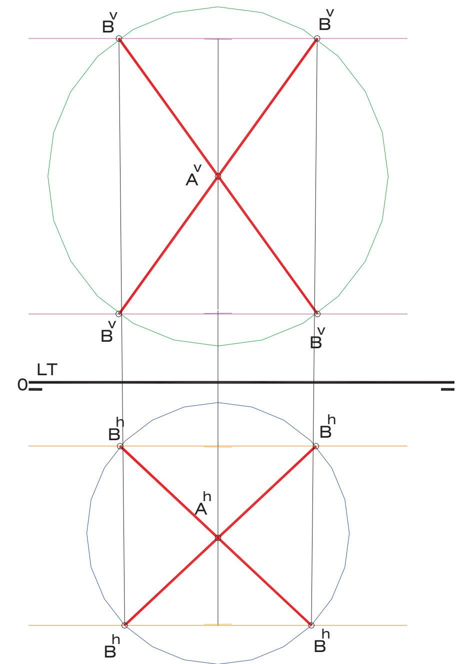


Fig. 1.19-b

De esta manera se concluye que existen cuatro posibles rectas que pueden contener al segmento AB y que existen, sobre esas cuatro rectas, ocho soluciones para el segmento AB (Fig. 1.19-b).

Es posible determinar las soluciones de este tipo de problema aplicando dos giros simultáneamente (la Fig. 1.19-c muestra una de ellas), uno en torno a una recta de pié que pasa por A y el otro en torno a una recta de punta que pasa por ese mismo punto. El procedimiento comienza con la construcción de la doble proyección ortogonal de un segmento de recta frontal AB', de longitud igual al verdadero tamaño de AB y que forma α grados con PH. En segundo lugar, se trazan las proyecciones de un segmento horizontal AB'', de igual longitud y formando β grados con PV. Para encontrar la proyección vertical del punto B se construye un arco de centro en A^v y radio igual a la proyección vertical de AB'', el cual corta a una paralela a LT trazada por B'^v en el punto buscado (B^v). De forma análoga, el corte entre un arco de centro en A^h y radio $A^hB'^h$ y una paralela a LT trazada por B''^h, corresponde a la proyección horizontal del punto B.

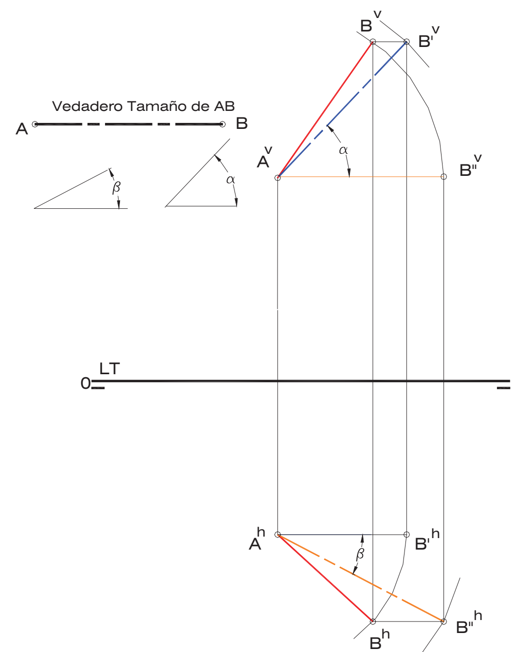


Fig. 1.19-c

Hay que destacar que no es posible resolver este problema aplicando nuevos planos de proyección, pues se desconocen ambas proyecciones diédricas del segmento AB.

CAPÍTULO II

2.1 El Plano

Es uno de los conceptos primarios de la geometría. El plano es el elemento geométrico *bidimensional* y puede ser determinado por tres puntos no alineados (Fig. 2.1-a), por una recta y un punto exterior a ella (Fig. 2.1-b), por dos rectas paralelas (Fig. 2.1-c) o por dos rectas que se cortan (Fig. 2.1-d). Podemos decir que lo más parecido a él es una hoja de papel, pero el plano no tiene grosor y es infinito para todos lados.

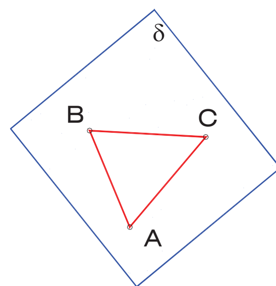


Fig. 2.1-a

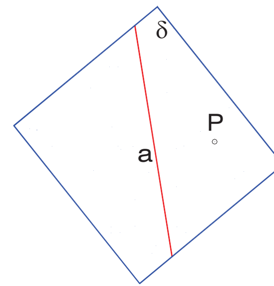


Fig. 2.1-b

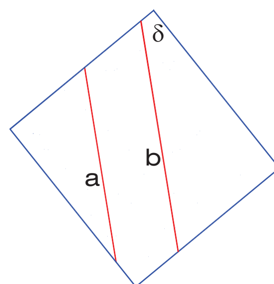


Fig. 2.1-c

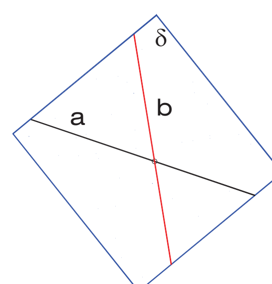


Fig. 2.1-d

Dos rectas paralelas se proyectan en cualquier sistema cilíndrico como rectas paralelas. En el Sistema Diédrico, si una recta “a” es paralela a otra recta “b”, las proyecciones de “a” serán paralelas a las proyecciones homónimas de “b”.

Si un par de rectas son secantes en el espacio (tienen un punto en común), el punto de corte de las proyecciones verticales de ambas rectas se encuentra alineado mediante una perpendicular a LT con el punto de corte de las proyecciones horizontales.

Si un plano está determinado por una recta “m” y un punto P exterior a ella, es posible transformar esa situación en una de las otras tres formas de definición de plano:

1. Escogiendo dos puntos A y B sobre la recta “m”, se tiene un plano dado por tres puntos no alineados (A, B y P).
2. Construyendo por P una recta “n” paralela a “m”, se tiene un plano dado por rectas paralelas (“m” y “n”).
3. Escogiendo un punto Q sobre la recta “m” y construyendo la recta PQ, se tiene un plano dado por dos rectas secantes (“m” y PQ) en el punto Q.

2.1.1 Trazas del plano

Sea un plano δ definido por las rectas paralelas “m” y “n”; los puntos pertenecientes al plano δ que se encuentran sobre los planos de proyección definen un par de rectas denominadas *Trazas del plano δ*, siendo la traza vertical una recta frontal de vuelo cero, en tanto que la traza horizontal es una recta horizontal de cota igual a cero. Es evidente que los puntos de traza de las rectas “m” y “n” pertenecen a las rectas de traza del plano δ que ellas definen,

lo cual es extensible a todas las infinitas rectas que pueden estar contenidas en el mencionado plano (Fig. 2.1).

En consecuencia, para determinar las trazas de un determinado plano bastará con hallar los puntos de traza de un par de rectas pertenecientes a él y unir mediante línea recta los puntos de traza vertical entre sí, lo que define la traza vertical del plano; análogamente, la recta que definen los puntos de traza horizontal constituye la traza horizontal del plano. Ambas rectas de traza son siempre concurrentes en la Línea de Tierra en un punto que suele denominarse Punto Muerto u origen de Trazas del Plano, y que es impropio si el plano en cuestión es paralelo a la Línea de Tierra. Se denominará como δ^v a la traza vertical del plano δ y como δ^h a la traza horizontal de dicho plano. Es importante resaltar el hecho de que la proyección horizontal de la traza vertical se encuentra sobre LT, y que también sobre LT se halla la proyección vertical de la traza horizontal.

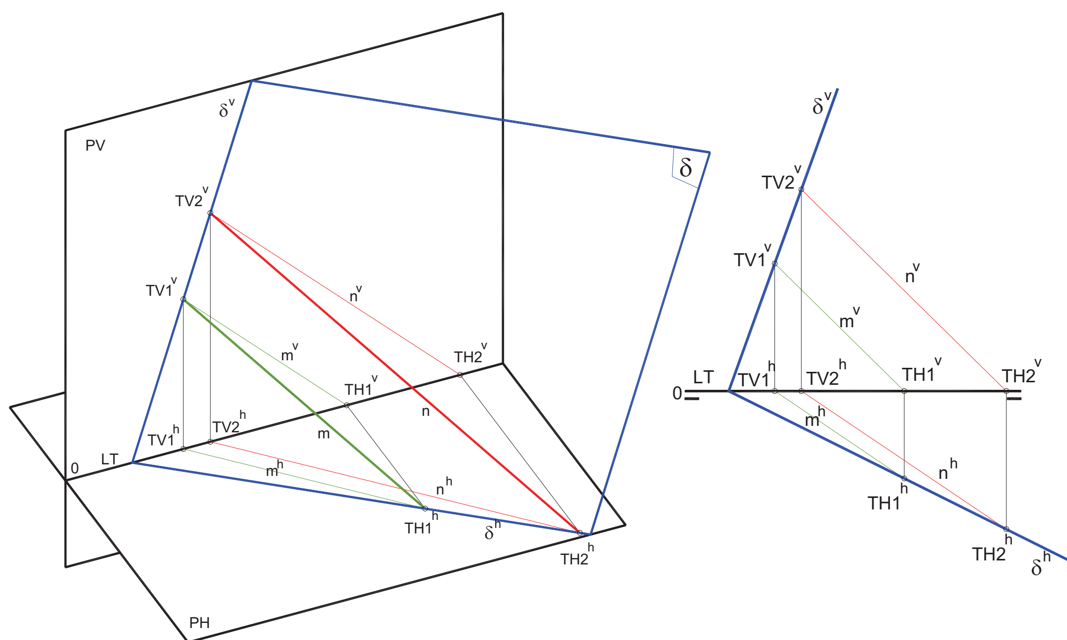


Fig. 2.1: Trazas del Plano

La representación del plano a través de sus trazas es la forma más elegante y la más empleada en Geometría Descriptiva, sin embargo, tales rectas no son indispensables para la resolución de los problemas que se plantean en esta asignatura. Se acostumbra dibujar únicamente segmentos de las trazas ubicados en las porciones positivas de los planos de proyección, recordando en todo momento que constituyen elementos de longitud infinita. Un plano queda determinado a través de sus trazas, a excepción de aquellos casos en los que el plano pase por la Línea de Tierra.

2.1.2 Posición del plano

El estudio de las proyecciones diédricas del plano se realiza atendiendo a las distintas posiciones que éste puede adoptar con respecto al sistema de referencia empleado, es decir, con respecto a los planos coordenados de proyección: Plano Vertical y Plano Horizontal.

Las variables objeto de estudio en las proyecciones diédricas son las concernientes a las características del plano: tamaño y forma de las distintas figuras planas que pueden construirse y ángulos que forma con los planos de proyección. La clasificación de las

distintas posiciones del plano se realiza variando estos ángulos, comenzando por las *posiciones notables*, que son aquellas situaciones en las que el plano forma con alguno de los planos de proyección un ángulo igual a cero. En este trabajo se utilizan letras griegas minúsculas para nombrar los diferentes planos.

2.1.2.1 Plano en posición notable

Como ya se ha indicado, el plano adopta posiciones notables cuando es paralelo con relación a alguno de los planos de proyección. En tal caso, todas las rectas que el plano contiene y todas las figuras geométricas planas que sobre él pueden ser definidas se proyectan en ese plano de proyección en verdadero tamaño.

Se denomina α al ángulo que se forma entre el plano objeto de estudio y el plano horizontal de proyección, mientras que β es el formado con el plano vertical. Considerando su posición relativa en relación con el sistema de referencia empleado en la doble proyección ortogonal (planos de proyección), es posible realizar la siguiente clasificación:

- **Plano en posición Horizontal** (Fig. 2.2): El ángulo formado con el plano horizontal (α) es, obviamente, igual a cero. La intersección del plano δ con este plano (δ^h) es una recta impropia, o lo que es lo mismo, está en el infinito. Por otra parte, la traza vertical de δ es una recta paralela a LT de vuelo cero y de cota igual al valor de cota que tienen todos los puntos pertenecientes al plano.

  Resulta evidente que si el plano δ es paralelo a PH resulta ser perpendicular a PV, en consecuencia, la proyección vertical de cualquier punto perteneciente a δ se encuentra sobre su traza vertical (δv). Esta es la condición de pertenencia de un punto a un plano en posición horizontal.

  Por otra parte, todas las rectas pertenecientes a δ serán de cota constante (paralelas a PH): de punta, paralelas a LT y horizontales. Cualquier figura contenida en el plano δ presenta su verdadero tamaño en la proyección horizontal, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.2.

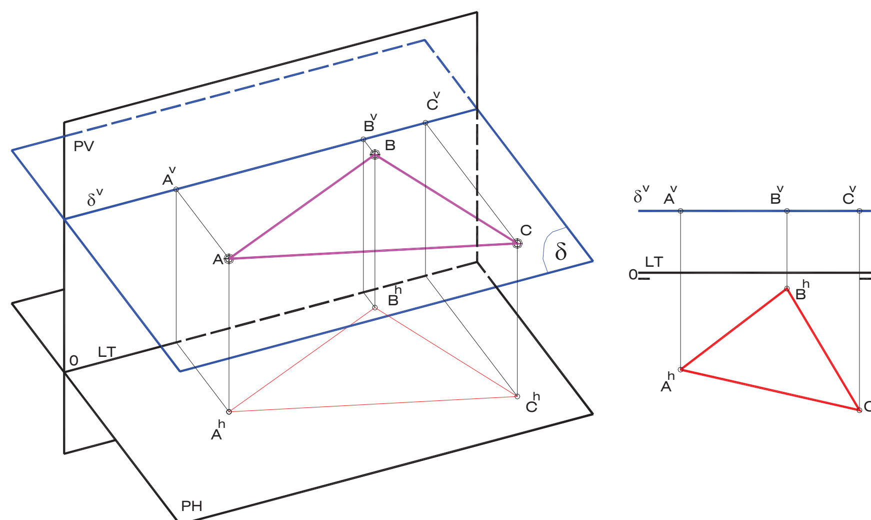


Fig. 2.2: Plano en posición Horizontal.

- **Plano en posición Frontal** (Fig. 2.3): El ángulo formado con el plano vertical (β) es igual a cero. La intersección del plano δ con este plano (δ^v) es una recta impropia, o lo que es lo mismo, está en el infinito. Por otra parte, la traza horizontal de δ es una recta paralela a LT de cota cero y de vuelo igual al valor de vuelo que tienen todos los puntos pertenecientes al plano.

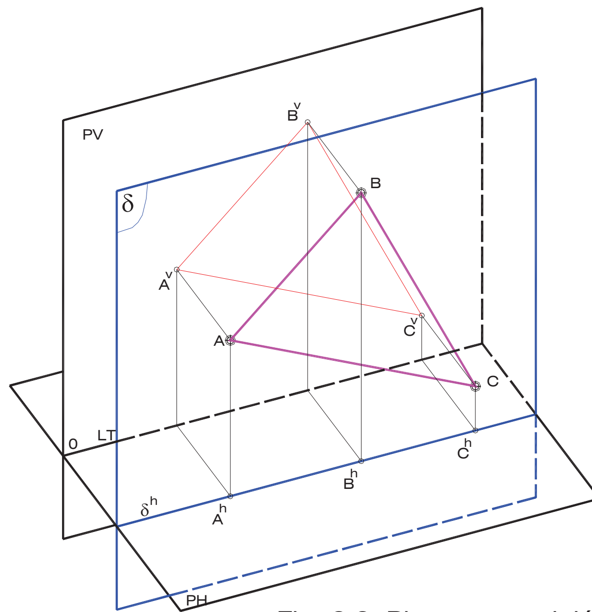


Fig. 2.3: Plano en posición Frontal.

Es obvio que si el plano δ es paralelo a PV resulta ser perpendicular a PH, en consecuencia, la proyección horizontal de cualquier punto perteneciente a δ se encuentra sobre su traza horizontal (δ^h). Esta es la condición de pertenencia de un punto a un plano en posición frontal.

Es de hacer notar que todas las rectas pertenecientes a δ serán de vuelo constante (paralelas a PV): de pié, paralelas a LT y frontales. Cualquier figura contenida en el plano δ presenta su verdadero tamaño en la proyección vertical, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.3.

- **Plano en posición Lateral o de Perfil** (Fig. 2.4): El ángulo formado con el plano vertical (β) es igual a noventa grados lo mismo que el formado con el plano horizontal (α), en tanto que el formado con el plano lateral es igual a cero. Las trazas del plano δ son una recta de pié y una de punta de vuelo y cota igual a cero, respectivamente. Todos los puntos pertenecientes a un plano en esta posición tienen igual valor de coordenada X.

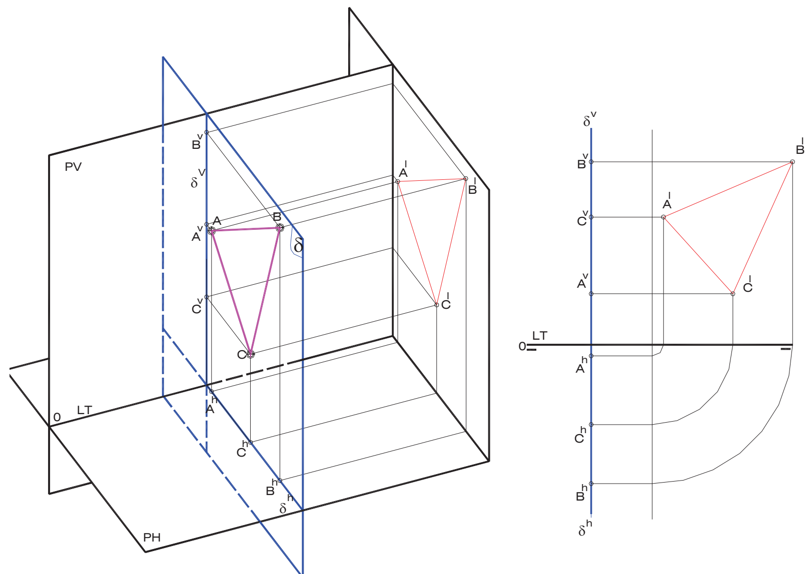


Fig. 2.4: Plano en posición Lateral o de Perfil.

Naturalmente que si el plano δ resulta ser perpendicular tanto a PH como a PV, la proyección horizontal de cualquier punto perteneciente a δ se encuentra sobre su traza horizontal (δ^h), mientras que la proyección vertical se halla sobre su traza vertical (δ^v). Esta es la condición de pertenencia de un punto a

un plano en posición lateral o de perfil.

Como dato importante es preciso señalar que todas las rectas pertenecientes a δ serán de abcisa constante (paralelas a PL): de pié, de punta y de perfil. Cualquier figura contenida en el plano δ presenta su verdadero tamaño en la proyección lateral, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.4.

2.1.2.2 Plano Proyectante

Existen otras posiciones particulares que el plano puede adoptar en el sistema Diédrico, en las que no resulta paralelo a uno de los tres planos básicos de proyección pero sí perpendicular a alguno de ellos. En estos casos se dice que el plano es *Proyectante*:

- **Plano Proyectante Horizontal** (Fig. 2.5): El ángulo formado con el plano vertical (β) adopta un valor distinto de cero y de noventa grados, en tanto que el ángulo formado con PH es recto. Las trazas del plano δ serán entonces una recta de pié y una horizontal de vuelo y cota igual a cero, respectivamente. El ángulo β del plano tiene el mismo valor que el ángulo formado entre la traza horizontal y la Línea de Tierra.

  Es evidente que si el plano δ resulta ser perpendicular a PH, la proyección horizontal de cualquier punto perteneciente a δ se encuentra sobre su traza horizontal (δ^h). Esta es la condición de pertenencia de un punto a un plano proyectante horizontal.

  En vista de que el plano en esta posición es oblicuo con respecto a PV, las figuras que puede contener se proyectan deformadas en la proyección vertical, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.5, por lo que es necesaria la aplicación de métodos para la determinación del verdadero tamaño de tales figuras.

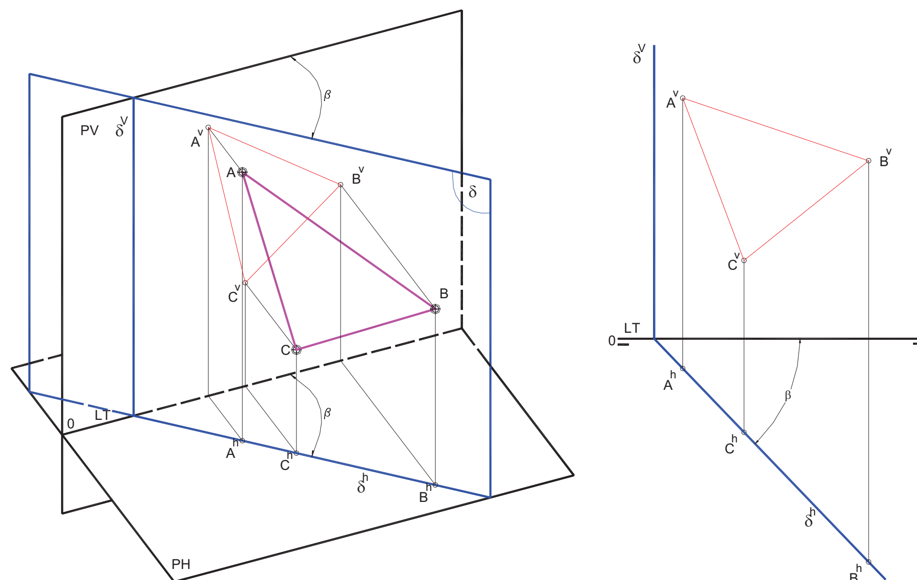


Fig. 2.5: Plano Proyectante Horizontal.

Cabe resaltar que un plano proyectante horizontal puede contener rectas de pié, horizontales y oblicuas, siempre que su proyección horizontal se ubique sobre la traza horizontal del plano.

- **Plano Proyectante Vertical** (Fig. 2.6): El ángulo formado con el plano horizontal (α) adopta un valor distinto de cero y de noventa grados, en tanto que el ángulo formado con PV es recto. Las trazas del plano δ serán entonces una recta frontal y una de punta de vuelo y cota igual a cero, respectivamente. El ángulo α del plano tiene el mismo valor que el ángulo formado entre la traza vertical y la Línea de Tierra. Es evidente que si el plano δ resulta ser perpendicular a PV, la proyección vertical de cualquier punto perteneciente a δ se encuentra sobre su traza vertical (δ^v). Esta es la condición de pertenencia de un punto a un plano proyectante vertical.

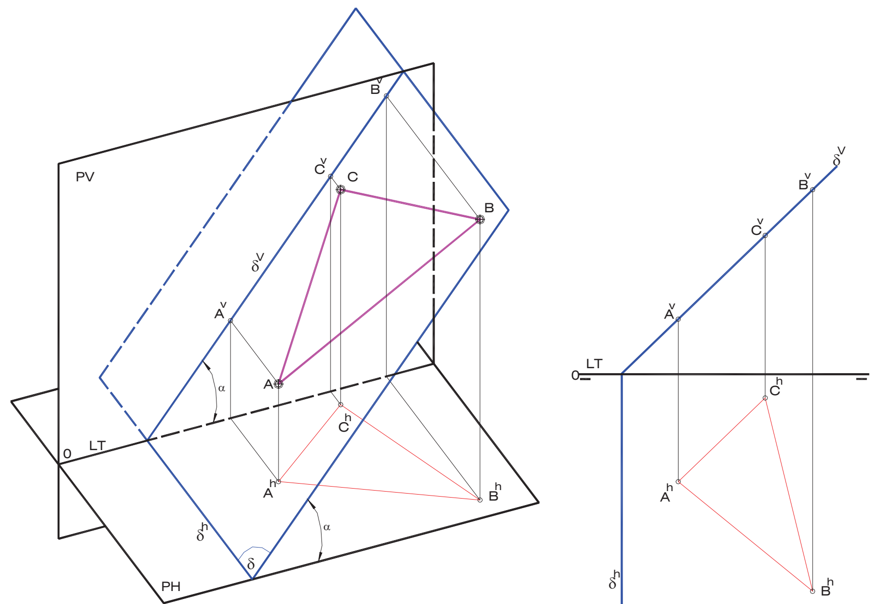


Fig. 2.6: Plano Proyectante Vertical.

En vista de que el plano en esta posición es oblicuo con respecto a PH, las figuras que puede contener se proyectan deformadas en la proyección horizontal, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.6, por lo que es necesaria la aplicación de métodos para la determinación del verdadero tamaño de tales figuras.

Es de hacer notar que un plano proyectante vertical puede contener rectas de punta, frontales y oblicuas, siempre que su proyección vertical se ubique sobre la traza vertical del plano.

2.1.2.3 Plano en posición oblicua con respecto a los planos de proyección

Si el plano está ubicado en el espacio de tal forma que no es paralelo o perpendicular a ninguno de los dos planos coordenados del sistema Diédrico (PH y PV), tanto el ángulo formado con el plano horizontal (α) como el formado con el vertical (β) adoptan un valor distinto de cero y de noventa grados. En dependencia de la relación existente entre el plano objeto de estudio y el plano lateral auxiliar, es posible realizar la diferenciación entre dos posiciones: *paralelo a la Línea de Tierra* y *Oblicuo o en posición accidental*.

- **Plano Paralelo a la Línea de Tierra** (Fig. 2.7): En este caso, tanto el ángulo formado con el plano horizontal (α) como el formado con el vertical (β) adoptan un valor distinto de cero y de noventa grados. Como el plano resulta ser perpendicular al plano lateral – y por lo tanto paralelo a LT - se cumple la siguiente relación:

$$\alpha + \beta = 90°$$

Las trazas del plano δ serán entonces dos rectas paralelas a la Línea de Tierra, una de cota cero y la otra de vuelo cero. Los valores de los ángulos α y β son los mismos valores de los ángulos formados entre la traza lateral del plano δ y las intersecciones entre PH y PL y entre PV y PL, respectivamente.

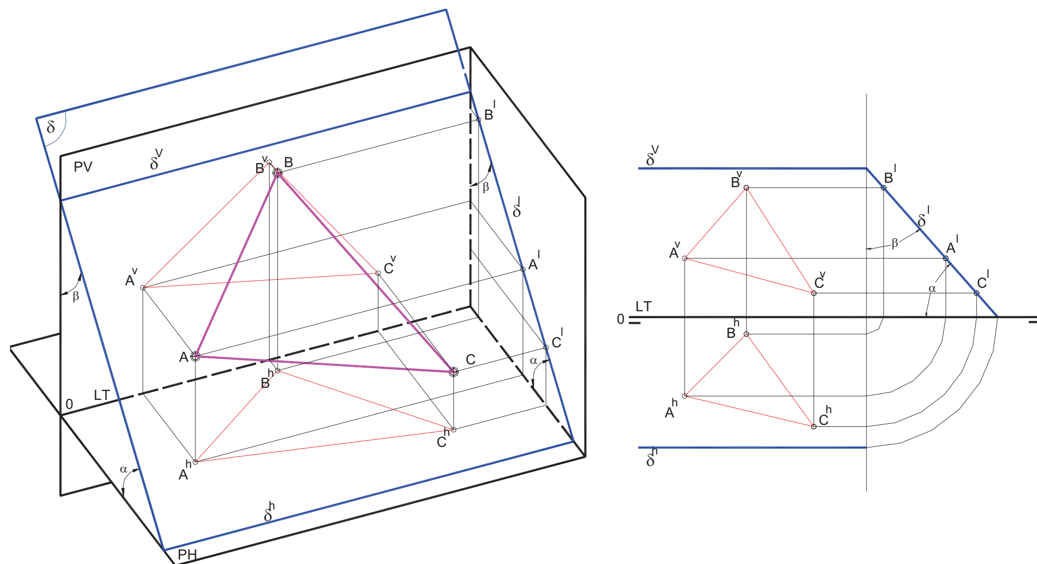


Fig. 2.7: Plano Paralelo a LT.

Es evidente que si el plano δ resulta ser perpendicular a PL, la proyección lateral de cualquier punto perteneciente a δ se encuentra sobre su traza lateral (δ^l). Esta es la condición de pertenencia de un punto a un plano proyectante lateral o paralelo a LT. En vista de que el plano en esta posición es oblicuo con respecto a PH y a PV, las figuras que puede contener se proyectan deformadas en ambas proyecciones diédricas, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.7, por lo que es necesaria la aplicación de métodos para la determinación del verdadero tamaño de tales figuras.

Es de hacer notar que un plano paralelo a LT puede contener rectas paralelas a LT, de perfil y oblicuas, encontrándose su proyección lateral sobre la traza lateral del plano en cuestión.

- **Plano Oblicuo o en posición accidental** (Fig. 2.8) En esta posición el plano resulta ser también oblicuo tanto a los dos planos de proyección principales del sistema diédrico (PH y PV) como al plano de proyección lateral, por lo que se cumple la siguiente relación:

$$\alpha + \beta > 90$$

Las trazas del plano δ serán entonces dos rectas concurrentes en la Línea de Tierra: una horizontal de cota cero y una frontal de vuelo cero. No es posible determinar los valores de los ángulos α y β directamente en alguna de las proyecciones básicas. De igual manera, las figuras que puede contener el plano se proyectan

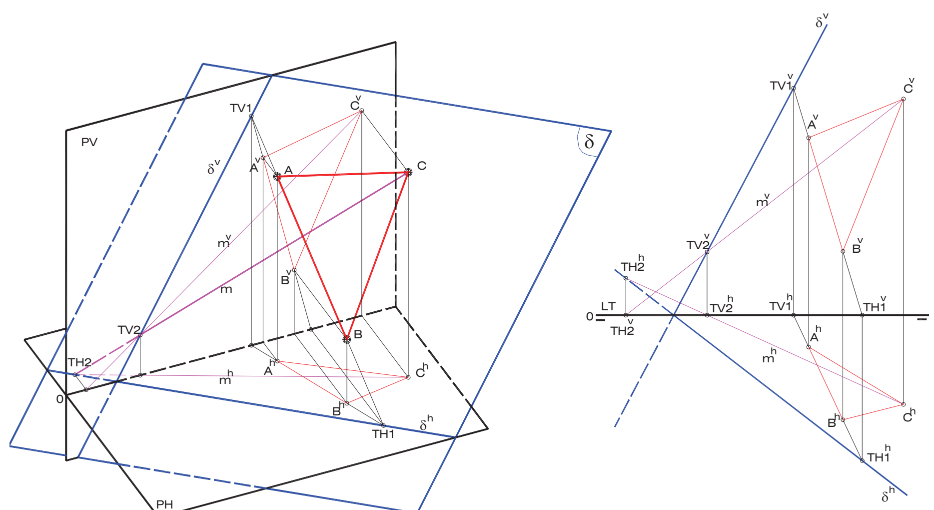


Fig. 2.8: Plano Oblicuo o Plano en Posición Accidental

deformadas en ambas proyecciones diédricas, como es el caso del triángulo ABC en la Fig. 2.8, por lo que es necesaria la aplicación de métodos para la determinación del verdadero tamaño de tales figuras.

Un plano en posición accidental contiene rectas frontales, horizontales, de perfil y oblicuas, siempre que cumplan la siguiente condición, válida en forma general para cualquier posición que adopte el plano en el Sistema Diédrico:

Para que una recta esté contenida en un plano, es necesario que pase por al menos dos puntos pertenecientes a dicho plano o que corte a por lo menos dos rectas de sus rectas.

Las dos rectas del plano a que hace referencia la condición pueden ser las trazas, por lo que también es válido decir que *si una recta pertenece a un plano, sus trazas deben estar sobre las trazas homónimas del plano* (Fig. 2.8).

Ahora bien, *la condición necesaria y suficiente para que un punto pertenezca a un determinado plano, es que se encuentre sobre una (cualquiera) de sus rectas.* En la Fig. 2.8 se muestra cómo el punto C se encuentra sobre una recta cualquiera “m” del plano δ, por lo que puede concluirse que C pertenece a este plano.

Rectas Características de un Plano Oblicuo: Son todas aquellas rectas frontales y horizontales que pertenecen a un determinado plano. Una recta horizontal “h” debe tener su proyección vertical paralela a LT y su punto de traza vertical TV sobre la traza vertical δ^v del plano al cual pertenece. De igual forma, su punto de traza horizontal TH se debe encontrar sobre la traza horizontal δ^h del mencionado plano, pero como se trata de un punto impropio (en el infinito), la recta debe ser paralela a δ^h, lo mismo que su proyección horizontal.

De manera análoga, una recta frontal “f” de un plano δ es una recta paralela al plano vertical de proyección y que pertenece a δ, por lo que su punto de traza horizontal se encuentra sobre la traza horizontal δ^h y su proyección vertical es paralela a la traza vertical δ^v (Fig. 2.9).

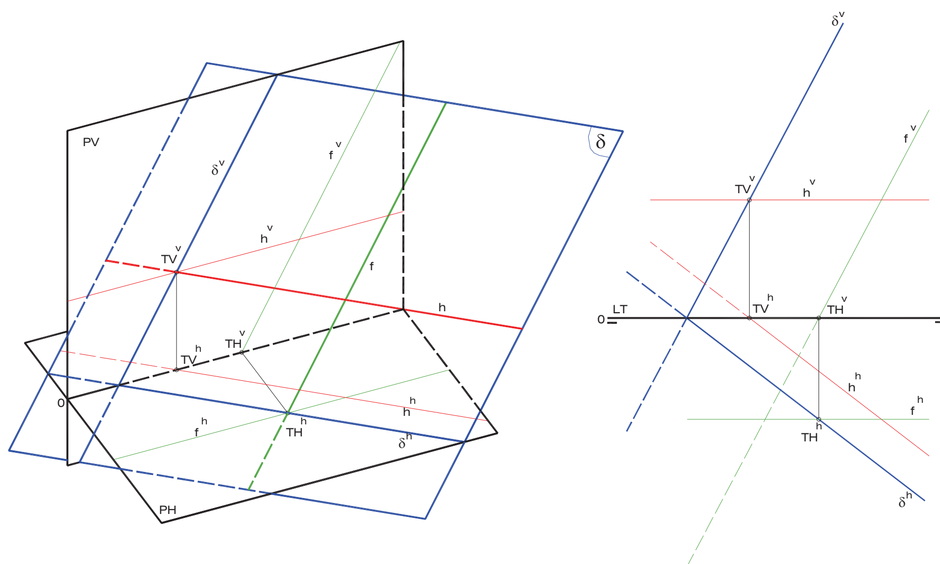


Fig. 2.9: Rectas Características de un Plano Oblicuo.

Rectas de Máxima Pendiente: Son aquellas rectas pertenecientes a un plano δ que forman, entre todas las infinitas rectas de dicho plano, el mayor ángulo con respecto al plano horizontal de proyección. En consecuencia, este ángulo α es el mismo ángulo que se forma entre el plano δ y PH. Así, si se desea conocer el ángulo α de un determinado plano, bastará con hallar el valor del ángulo α de cualquiera de sus rectas de máxima pendiente.

Por otra parte, se tiene que las rectas de máxima pendiente de un plano forman ángulo recto con las rectas horizontales (la traza horizontal entre ellas) pertenecientes a éste.

Para dibujar las proyecciones de una de las rectas de máxima pendiente “mp” de un plano δ, se comienza trazando su proyección horizontal mp^h, la cual es perpendicular a la traza horizontal (y a cualquier otra recta horizontal) δ^h, ya que corresponde a la traza horizontal de un plano proyectante horizontal que pasa por la recta “mp”. Seguidamente, aplicando la condición de pertenencia de recta a plano, se determina la proyección vertical de “mp” (Fig. 2.10).

Por otra parte, si se conoce una de las rectas de máxima pendiente de un plano δ es posible determinar las trazas de éste, hallando en primer lugar los puntos de traza TH y TV de la recta. Luego se dibuja la traza horizontal δ^h, trazando por la proyección horizontal de TH una perpendicular a la proyección horizontal de la recta de máxima pendiente. Finalmente, la recta definida por el corte entre δ^h y la Línea de Tierra y la proyección vertical de TV será la traza vertical del plano δ.

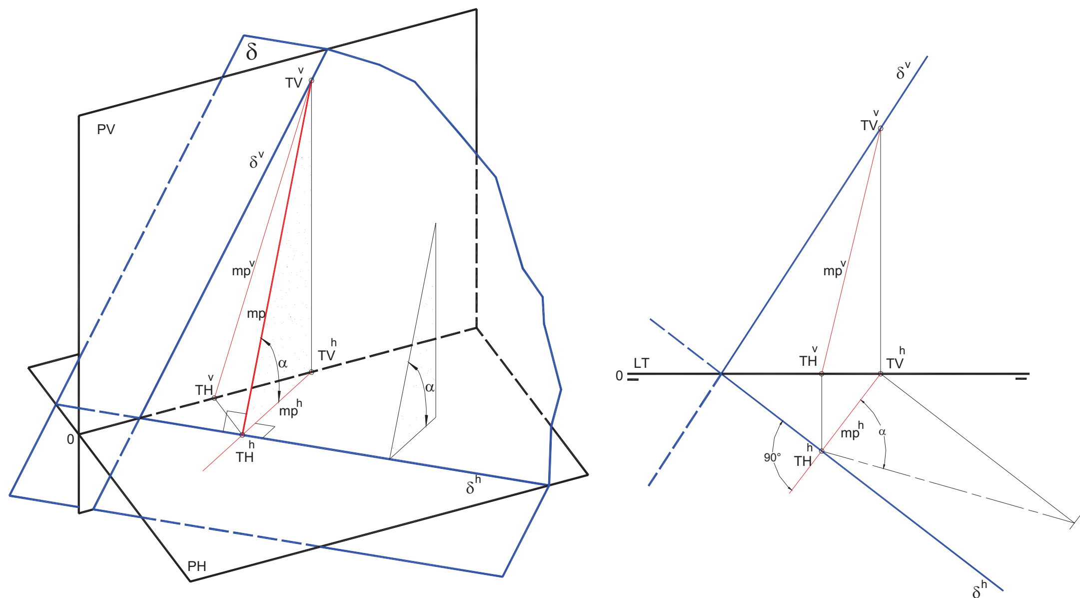


Fig. 2.10: Recta de Máxima Pendiente.

Rectas de Máxima Inclinación: Son aquellas rectas pertenecientes a un plano δ que forman, entre todas las infinitas rectas de dicho plano, el mayor ángulo con respecto al plano vertical de proyección. En consecuencia, este ángulo β es el mismo ángulo que se forma entre el plano δ y PV. Así, si se desea conocer el ángulo β de un determinado plano, bastará con hallar el valor del ángulo β de cualquiera de sus rectas de máxima inclinación.

Por otra parte, se tiene que las rectas de máxima inclinación de un plano forman ángulo recto con las rectas frontales (la traza vertical entre ellas) pertenecientes a éste.

La construcción de una de las rectas de máxima inclinación de un plano determinado δ se realiza en forma análoga al caso anterior, siendo su proyección vertical perpendicular a la traza vertical (y a todas las demás frontales) del plano.

De igual manera, si se conoce una de las rectas de máxima inclinación de un plano δ es posible determinar las trazas de éste, sabiendo que pasan por los puntos de traza de la recta y que δ^v es perpendicular a la su proyección vertical.
Los conceptos de recta de máxima pendiente y de máxima inclinación son independientes de la posición del plano al cual pertenecen, por lo que es fácil identificar qué características tienen en cada caso:

- Plano Horizontal: Cualquiera de sus rectas es de máxima pendiente, ya que todas son horizontales; sus rectas de máxima inclinación son de punta.
- Plano Frontal: Cualquiera de sus rectas es de máxima inclinación, ya que todas son frontales; sus rectas de máxima pendiente son de pié.
- Plano Lateral o de Perfil: Sus rectas de máxima pendiente son de pié, en tanto que las de máxima inclinación son de punta.
- Plano Proyectante Horizontal: Sus rectas de máxima pendiente son de pié y las de máxima inclinación son horizontales.
- Plano Proyectante Vertical: Sus rectas de máxima pendiente son frontales; las de máxima inclinación son de punta.
- Plano Proyectante Lateral o Paralelo a LT: En este caso las rectas de máxima pendiente coinciden con las de máxima inclinación y son de perfil.

2.1.3 Métodos utilizados en la determinación del Verdadero Tamaño de Planos.

Está claro que en la mayor parte de los casos los planos no reflejan en las proyecciones diédricas su Verdadero Tamaño. Por tal motivo, es absolutamente necesaria la aplicación de métodos que permitan la resolución de los siguientes tipos de problema:

- Dada una figura geométrica contenida en un plano determinar su verdadera forma y tamaño.
- Construir las proyecciones de una figura geométrica plana si se conocen sus características y el plano al cual pertenece.

Los métodos comúnmente empleados para lograr el objetivo planteado son los siguientes:

1. Abatimiento
2. Introducción de nuevos planos de proyección
3. Giro

1. **Abatimiento:** Consiste en la rotación de un plano δ en torno a un eje paralelo a uno de los planos de proyección (eje de abatimiento) hasta lograr que adopte una posición favorable, es decir, una en la que su Verdadero Tamaño se proyecte sobre alguno de los planos de proyección. Resulta evidente que el mencionado eje de rotación debe ser una de las rectas características de δ: frontal, si se quiere que el plano objetivo llegue a ser paralelo a PV; horizontal, si lo que se busca es hacer que sea paralelo a PH.

   Cuando se abate un plano se abaten todos sus puntos, pero en la práctica solamente se representan aquellos que son de importancia para la resolución de un problema determinado; por este motivo se habla del abatimiento de algún punto sobre el plano objetivo. Es una práctica común utilizar como eje de abatimiento alguna de las trazas del plano objetivo, logrando así que éste coincida con uno de los planos de proyección. En cualquier caso, si se quiere abatir un punto perteneciente al plano objetivo δ es indispensable precisar los siguientes elementos:

   a) Eje de abatimiento
   b) Radio y Centro de abatimiento
   c) Sentido del abatimiento

Sea un plano oblicuo δ (Fig. 2.11). Supóngase que se desea determinar las proyecciones de un triángulo equilátero ABC de centro en el punto O y vértice en el punto A, contenido en un plano oblicuo δ. En primer lugar se debe escoger una recta característica del plano como eje de abatimiento, por ejemplo, la traza horizontal. Evidentemente, será necesario abatir los puntos A y O, pues son los elementos que permiten la construcción del triángulo ABC en verdadero tamaño.

Las rectas sobre las cuales se encuentran los radios de abatimiento correspondientes ("a" y "b") son rectas perpendiculares al eje de abatimiento – de máxima pendiente en el ejemplo – dado que la rotación se verifica en un plano perpendicular tanto a PH como a δ. Los puntos de corte K y K1 entre las rectas "a" y "b" y la traza horizontal del plano (eje de abatimiento) constituyen los centros de abatimiento de los puntos A y O, respectivamente; las distancias KA y K1O vienen a ser las magnitudes de ambos radios de abatimiento.

Ahora bien, el ángulo de rotación es igual al ángulo que forma el plano δ con PH o a su complemento. Se prefiere usar este último valor con la finalidad de evitar que la proyección de las figuras (horizontal en el ejemplo) se confunda con su verdadero tamaño, manteniendo cierta claridad en el trazado.

Las posiciones abatidas de los puntos A y O se encontrarán en las intersecciones de los planos de rotación correspondientes con el plano horizontal. Dichas intersecciones coinciden con las proyecciones horizontales de las rectas de máxima pendiente "a" y "b". Bastará entonces con consignar sobre las direcciones a^h y b^h , a partir de K^h y $K1^h$, los verdaderos tamaños de los segmentos KA y K1O (radios de abatimiento), previamente determinados aplicando triángulo de abatimiento. De esta forma se obtienen los puntos abatidos A^R y O^R.

Nótese cómo la diferencia de cota entre los puntos A y O y sus correspondientes centros de abatimiento son iguales a las cotas de A Y O, debido a que aquellos se encuentran en el plano horizontal (tienen cota igual a cero).

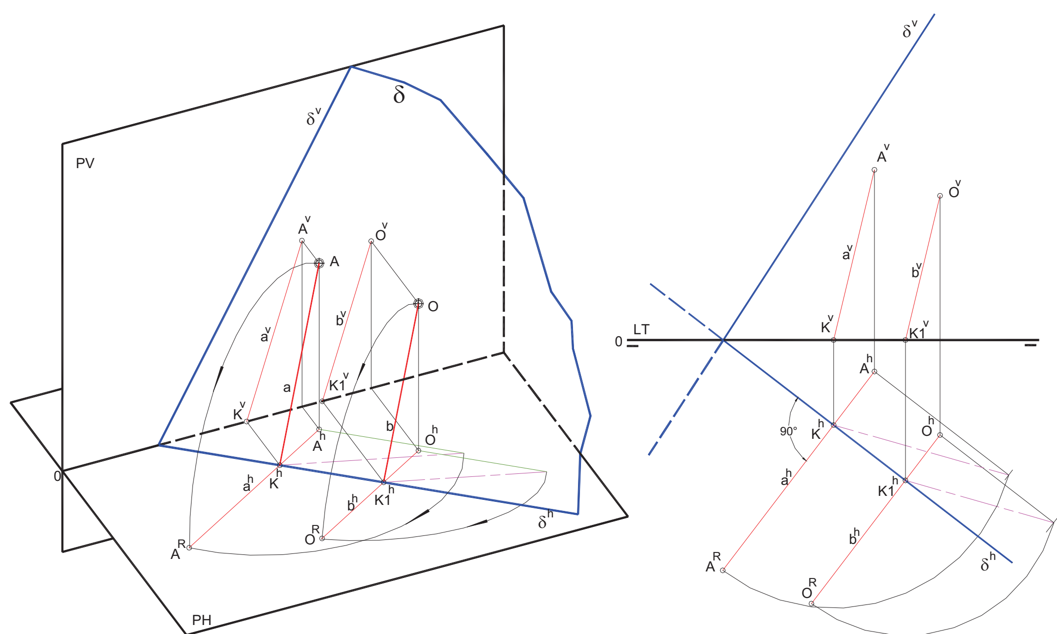


Fig. 2.11: Abatimiento de plano Oblicuo.

Una vez que los puntos A y O se encuentran abatidos – en realidad se abate el plano δ – es posible dibujar el triángulo equilátero $A^RB^RC^R$. Es conveniente usar línea de trazos cortos y largos para enfatizar el carácter de representación auxiliar en verdadero tamaño que tiene dicho triángulo.
El siguiente paso es la determinación de las proyecciones diédricas de los vértices obtenidos (B y C), para lo cual se deben invertir (Fig. 2.12) los pasos del proceso de abatimiento explicado anteriormente, comenzando por trazar por los puntos B^R y C^R líneas rectas perpendiculares al eje de abatimiento δ^h, encontrando así los puntos $K2^h$ y $K3^h$, centros de abatimiento de los puntos B y C. Seguidamente, se dibujan por estos puntos líneas rectas paralelas a los verdaderos tamaños de los radios de abatimiento correspondientes a A y O, consignándose sobre ellas, a partir de $K2^h$ y $K3^h$, las distancias $K2^hB^R$ y $K3^hC^R$ (radios de abatimiento de los puntos B y C). Luego, por los puntos 1 y 2 obtenidos en la operación anterior se trazan paralelas al eje de abatimiento, las que, al cortar las perpendiculares a dicho eje, generan las proyecciones horizontales de los puntos B y C.

Finalmente, las proyecciones verticales de B y C pueden hallarse aplicando la condición de pertenencia de punto a plano. También es posible hacerlo si se consignan sobre las referencias de los puntos B y C y a partir de la línea de tierra las distancias B^h1 y C^h1, respectivamente. Esto se debe a que tales distancias son las diferencias de cota entre los puntos B y C y sus correspondientes centros de abatimiento (K2 y K3), los cuales se encuentran sobre el plano horizontal de proyección.

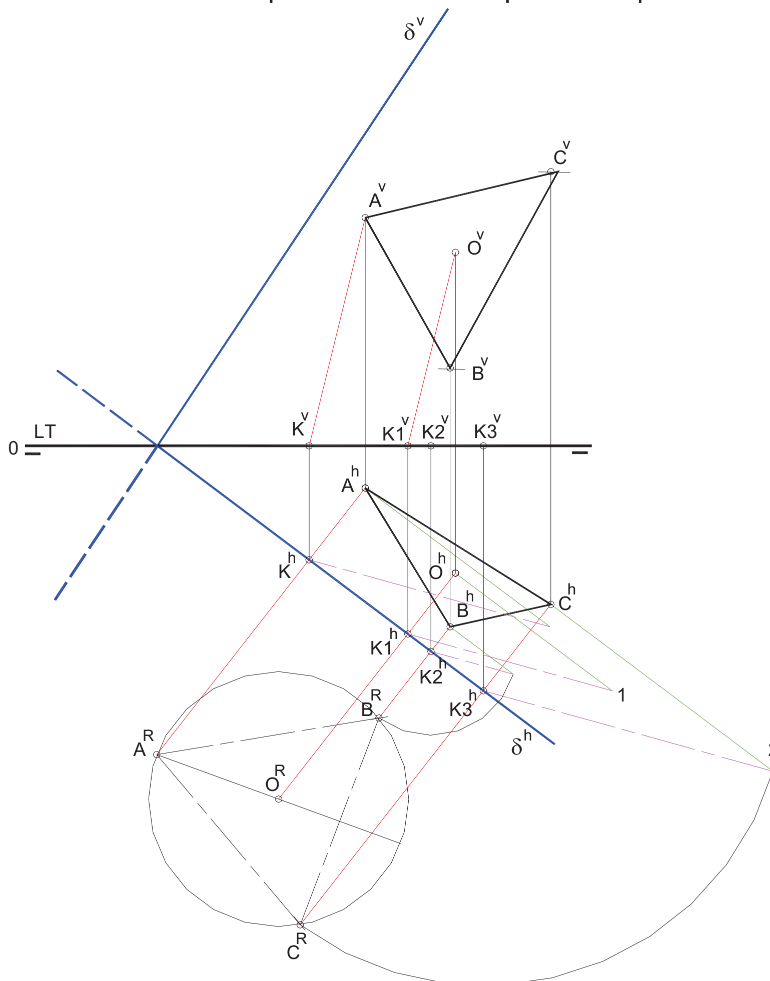


FIG. 2.12: Abatimiento de Plano Oblicuo. Continuación.

Cuando se trata de planos en otras posiciones la aplicación del abatimiento es análoga, bastará con recordar qué características tienen los posibles ejes de abatimiento en cada caso. En ocasiones, el procedimiento debe realizarse en torno a rectas frontales de vuelo distinto de cero o de rectas horizontales de cota diferente de cero. En esos casos se debe ser cuidadoso en la determinación del verdadero tamaño de los radios de abatimiento.

Existen muchos artificios que permiten facilitar el procedimiento. Una forma muy práctica de abatir un plano oblicuo consiste en utilizar las trazas abatidas (Fig. 2.13) y referir los puntos a rectas características, que, como es sabido, son paralelas a las trazas. Por ejemplo, sea en el mismo ejercicio anterior, la traza horizontal del plano δ el eje de rotación y considérese el abatimiento de un punto P cualquiera sobre la traza vertical; para ello se debe trazar una perpendicular a δ^h por la proyección horizontal de P y un arco de centro en el origen de trazas X y radio igual al segmento comprendido entre éste y el punto P^v; el corte entre la recta perpendicular a δ^h trazada por P^h y el mencionado arco resulta en P^R. Como el origen de trazas se halla sobre el eje de abatimiento su posición no varía, por lo que la recta definida por ese punto y P abatido constituye la traza vertical abatida del plano δ.

A continuación se trazan por los puntos A y O rectas horizontales y se determinan sus puntos de traza vertical Q y R. Para abatir estos puntos bastará con trazar arcos de centro en el origen de trazas X y radios XQ^v y XR^v, los cuales cortarán a la traza vertical abatida en Q^R y R^R. Los puntos A y O abatidos se hallan en el corte entre las perpendiculares al eje de abatimiento trazadas por A^h y O^h y las rectas horizontales abatidas correspondientes, las cuales deben ser paralelas a la traza horizontal del plano.

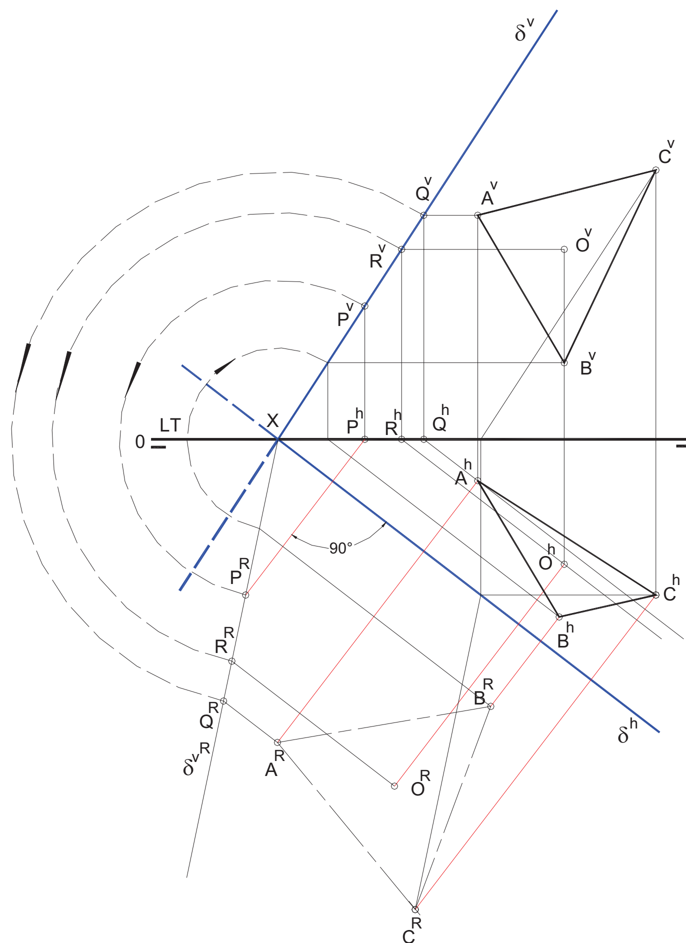


Fig. 2.13: Abatimiento de plano Oblicuo mediante trazas y rectas características.

Una vez construida la figura geométrica pedida, se han determinado las proyecciones diédricas de los puntos resultantes B y C refiriéndolos a una horizontal y a una frontal, respectivamente.

2. **Introducción de nuevos planos de proyección (Cambio de Plano):** Consiste en el cambio de posición de los observadores virtuales y de la orientación de los rayos proyectantes con la finalidad de lograr que un determinado plano objetivo δ adopte una posición notable. Este movimiento genera nuevos sistemas de referencia que deberán ser perpendiculares a los nuevos rayos proyectantes, y a su vez deberán cumplir con las características de la Proyección Diédrica o de Monge.

   No es posible cambiar la posición de ambos observadores de manera simultánea, sino que el procedimiento debe ser escalonado. De lo contrario, sería imposible establecer la relación entre el sistema de proyección original y el nuevo sistema en el que el plano objetivo aparece en una posición notable.

   El caso más sencillo es aquél en el que el plano objetivo δ es proyectante, bien horizontal o bien vertical, ya que en vista de que es perpendicular a uno de los planos de proyección originales, se requiere del cambio de posición de uno sólo de los observadores y de la consecuente introducción de un único nuevo plano de proyección.

   Si se trata de un plano proyectante horizontal (Fig. 2.14), es necesario considerar un plano vertical PV2 perpendicular a PH, paralelo a δ y a cualquier distancia de éste, con lo cual se genera un nuevo sistema de proyección conformado por PH y PV2, cuya línea de tierra LT2 será paralela a la traza horizontal del plano δ. En vista de que el nuevo sistema y el original comparten el plano horizontal de proyección, la distancia entre las proyecciones verticales (A^v, B^v, C^v, etc.) de los puntos del plano δ y LT (cotas) son las mismas que existen entre las nuevas proyecciones verticales de esos puntos (A^2, B^2, C^2, etc.) y LT2.

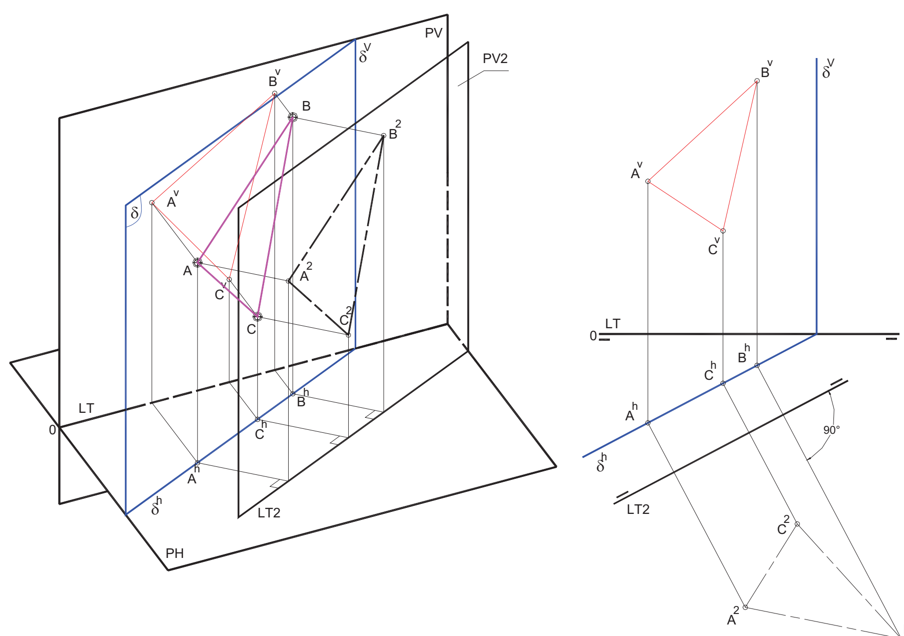


Fig. 2.14: Cambio de plano aplicado a un plano proyectante horizontal.

   Si se trata de un plano proyectante vertical, el nuevo plano de proyección PH2 deberá ser paralelo a δ y perpendicular a PV; la nueva línea de tierra LT2 será paralela a la traza vertical del plano objetivo y el valor del vuelo de cada uno de los puntos del plano es invariable de un sistema a otro, en consecuencia, la distancia entre las proyecciones horizontales (A^h, B^h, C^h, etc.) y LT es igual a la distancia entre las nuevas

proyecciones horizontales (A^2, B^2, C^2, etc.) y la línea de tierra del segundo sistema de proyección LT2.

En el caso de planos que no son perpendiculares a alguno de los planos de proyección (en posición accidental y paralelos a la Línea de Tierra), el proceso para la obtención de una nueva proyección en verdadero tamaño debe realizarse en dos etapas:

1. Introducir un nuevo plano auxiliar de proyección perpendicular al plano objetivo y a uno de los de proyección, con el fin de generar un sistema LT2 en el que éste resulte proyectante.
2. Introducir un segundo plano auxiliar de proyección paralelo al plano objetivo y perpendicular al primer plano auxiliar, con lo que se logra generar un sistema LT3 en el cual el plano objetivo tienen una posición notable (horizontal o frontal).

El primero de los planos auxiliares de proyección debe ser perpendicular a las rectas características del plano δ; si se construye perpendicular a las horizontales, δ será un plano proyectante vertical en el nuevo sistema LT2, en tanto que si dicho plano auxiliar es perpendicular a las frontales, se obtiene que δ es proyectante horizontal en el mencionado sistema.

En la Fig. 2.15 se muestra el procedimiento empleado para determinar el verdadero tamaño de un triángulo ABC contenido en un plano δ mediante la introducción de nuevos planos de proyección. El primer paso consiste en construir una línea de tierra LT2 perpendicular a una de las trazas del plano δ - la horizontal en el ejemplo - y a cualquier distancia de ésta. Luego se trazan perpendiculares a LT2 por las proyecciones de A, B y C comunes a ambos sistemas, es decir, las horizontales, sobre las cuales se consignan, a partir de LT2, las cotas de cada punto. Esta operación da lugar a A^2, B^2 y C^2, proyecciones de los puntos A, B y C sobre el primer plano auxiliar. Es de hacer notar que dichas proyecciones se encuentran alineadas sobre una recta (δ^2) que pasa por el punto de corte entre la traza horizontal del plano δ y LT2, ya que, como se ha indicado, este plano es proyectante vertical en el sistema LT2.

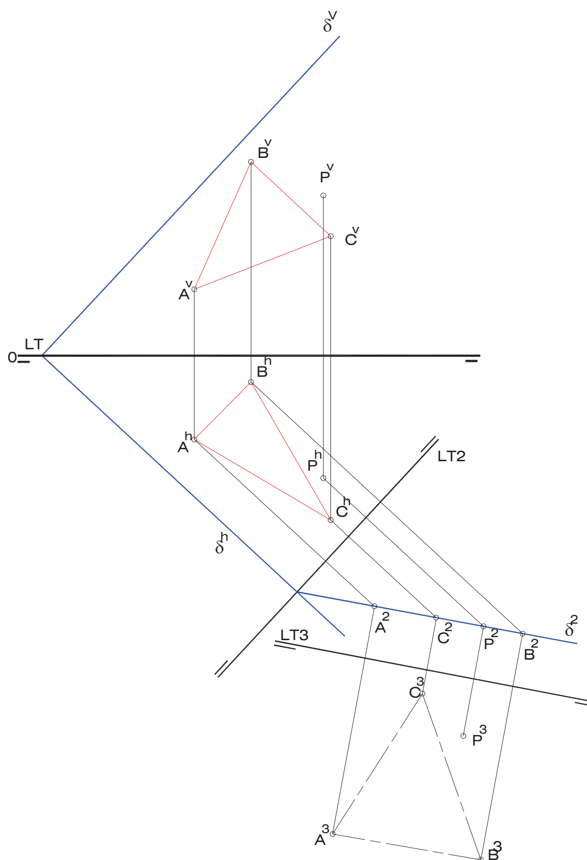


Fig. 2.15: Cambio de plano aplicado. a un plano oblicuo.

Si se construye una tercera línea de tierra LT3 paralela a δ^2, se genera un tercer sistema de proyección en el cual el plano δ es horizontal. Las proyecciones de A, B y C sobre el segundo plano auxiliar se obtienen trazando por A^2, B^2 y C^2 perpendiculares a LT3 y midiendo sobre ellas y a partir de LT3 las distancias entre A^h, B^h y C^h y LT2, que corresponden a los valores de

vuelo de cada uno de los puntos en el sistema LT2.

La obtención de la proyección horizontal de un determinado punto P del plano objetivo cuya proyección sobre el segundo plano auxiliar (P^3) se conoce, se logra siguiendo el procedimiento anterior a la inversa: Se traza por P^3 una perpendicular a LT3 la cual corta a δ^2 en un punto que es la proyección de P sobre el segundo plano auxiliar P^2. Luego, se construye una perpendicular a LT2 que pase por P^2 y se copia sobre ella, a partir de LT2, la distancia que hay entre P^3 y LT3; el resultado es la proyección horizontal de P.

Para obtener la proyección vertical del punto P bastará con aplicar la condición de pertenencia de punto a plano. También es posible encontrarla si se traza por P^h una referencia perpendicular a LT y se consigna sobre ella la distancia entre P^2 y LT2 (cota del punto P en el sistema LT2).

Cuando se trata de planos paralelos a LT el procedimiento es similar; recuérdese que la segunda línea de tierra (LT2) deberá ser perpendicular a una de las trazas del plano objetivo.

3. **Giro:** Consiste en la rotación de los puntos de un plano δ en torno a un eje perpendicular a uno de los planos de proyección (de pié o de punta) con la finalidad de obtener una posición conveniente de dicho plano en relación al sistema de referencia, es decir, paralelo a PV o a PH según sea el caso.

   Si el plano δ considerado es perpendicular a uno de los planos de proyección, una de sus trazas puede ser empleada como eje de giro: aquella que forme 90° con la línea de tierra; la Fig. 2.16 muestra el giro de un plano proyectante horizontal en torno a su traza vertical. El radio de giro que corresponde al punto A del plano δ no es más que la distancia entre dicho punto y el eje de rotación, medida sobre una perpendicular a éste eje. El mencionado radio resulta ser horizontal, por lo que su verdadero tamaño se proyecta sobre PH. Como puede observarse, el procedimiento mostrado es el mismo que plantea el abatimiento del plano δ sobre el plano vertical de proyección.

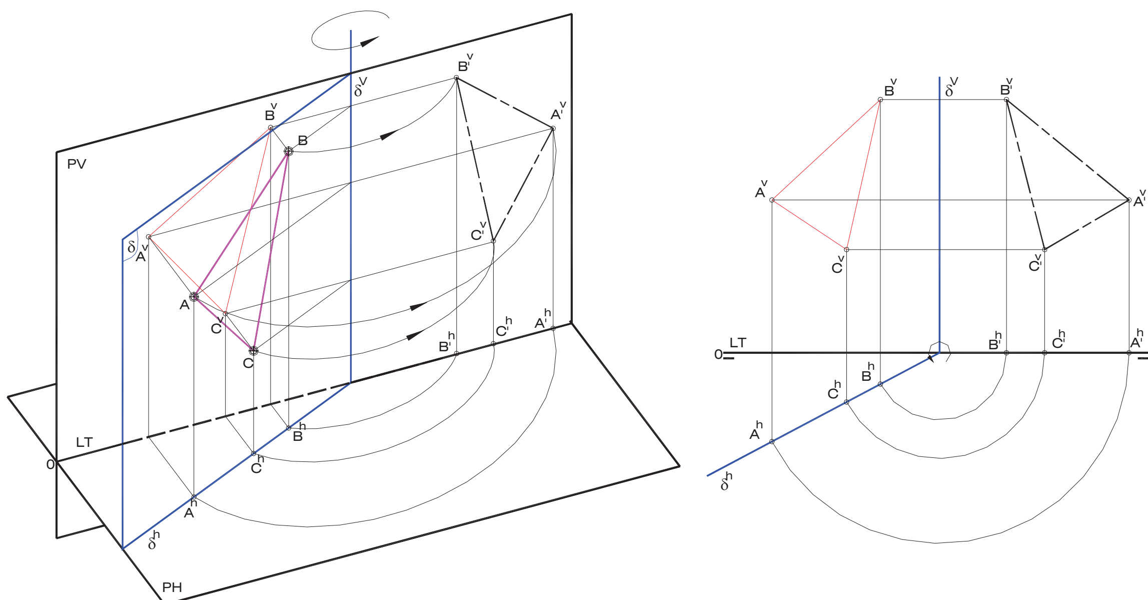


Fig. 2.16: Giro aplicado a un plano proyectante.

El resultado del procedimiento es la proyección vertical del triángulo A'B'C' situado en el propio plano vertical, el cual representa el verdadero tamaño del triángulo ABC contenido en el plano δ.

El giro del plano δ de la Fig. 2.16 puede realizarse en torno a cualquier recta de pié, perteneciente o no a dicho plano. Análogamente, el giro de un plano proyectante vertical se efectúa en torno a un eje de punta.

Cuando se desea obtener el verdadero de una figura plana contenida en un plano oblicuo con respecto a PV y PH (paralelo a LT o accidental) aplicando giro, es necesario realizar el proceso en dos etapas: la primera consiste en llevar el plano original a una posición perpendicular a uno de los planos de proyección (proyectante horizontal o proyectante vertical), en tanto que en la segunda el plano objetivo pasa de ésta última posición a una notable.

Resulta conveniente establecer como primer eje de giro una recta que pase por uno de los puntos importantes del problema, como por ejemplo un vértice de un polígono cuyo verdadero tamaño se desea obtener.

En la Fig. 2.17-a el eje de giro es de pié y pasa por el vértice A del triángulo ABC, en consecuencia, el punto A no cambia de posición. Por otra parte, en vista de que se quiere obtener un plano proyectante vertical, es necesario girar el punto de traza horizontal TH de la recta de máxima pendiente del plano δ que pasa por A, ya que de esa forma se obtiene la traza horizontal del plano δ luego del giro, sabiendo que la recta se máxima pendiente es frontal en la nueva posición. El ángulo ϕ señalado en la figura es la medida de amplitud del giro.

Así pues, se construye una circunferencia de centro en A^h y radio igual a la proyección horizontal del segmento ATH, para luego trazar por aquél punto una paralela a LT que corta a la circunferencia en TH'^h (hay dos soluciones, puesto que el giro se puede realizar en sentido horario o en sentido antihorario). Lógicamente la proyección vertical de TH' se encuentra sobre la línea de tierra.

La traza horizontal δ'^h del plano luego de este primer giro es perpendicular a LT y pasa por TH'^h, en tanto que la traza vertical δ'^v queda determinada por la proyección vertical de TH' y la proyección vertical de A.

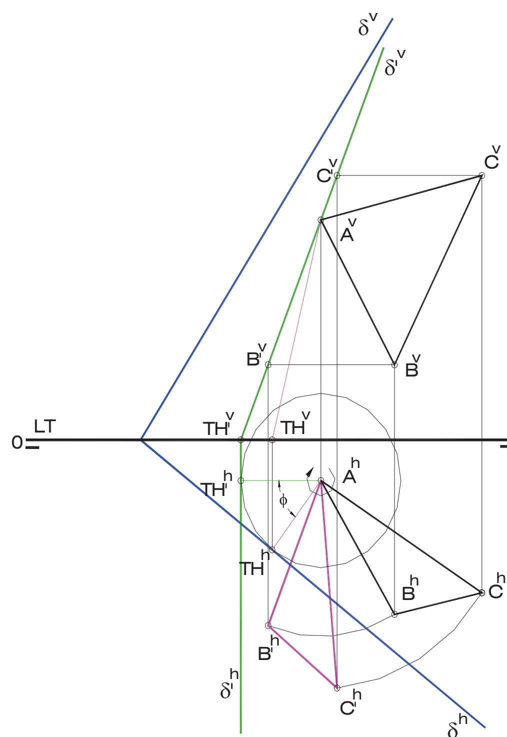


Fig. 2.17-a

Para encontrar la proyección vertical del punto B', correspondiente a la nueva posición asumida por B luego del giro, bastará con trazar por B^v una paralela a LT y hallar el punto de corte entre esta recta y la traza vertical δ'^v del plano δ'. Luego, para determinar la proyección horizontal de B' se dibuja una referencia perpendicular a LT por B'^v y un arco de centro en A^h – proyección horizontal del eje de giro – y radio igual a la proyección horizontal del

segmento AB; el corte de ambos elementos trazados resulta ser la proyección B'^{h} buscada.

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior se obtienen las proyecciones de C', con lo cual se completan las proyecciones diédricas del triángulo A'B'C', figura que es idéntica al triángulo ABC pero girada un ángulo ϕ en torno al eje de pié que pasa por A, tal que el plano que la contiene es proyectante vertical.

Finalmente, para obtener el verdadero tamaño del polígono ABC (Fig. 2.17-b) se debe aplicar un segundo giro, esta vez con la intención de hacer que el plano δ adopte una posición horizontal, o lo que resulta más sencillo, que se sitúe sobre dicho plano horizontal. Para ello se ha tomado como eje de rotación a la traza horizontal del plano δ' y se ha seguido un procedimiento análogo al que corresponde a la Fig. 2.16.

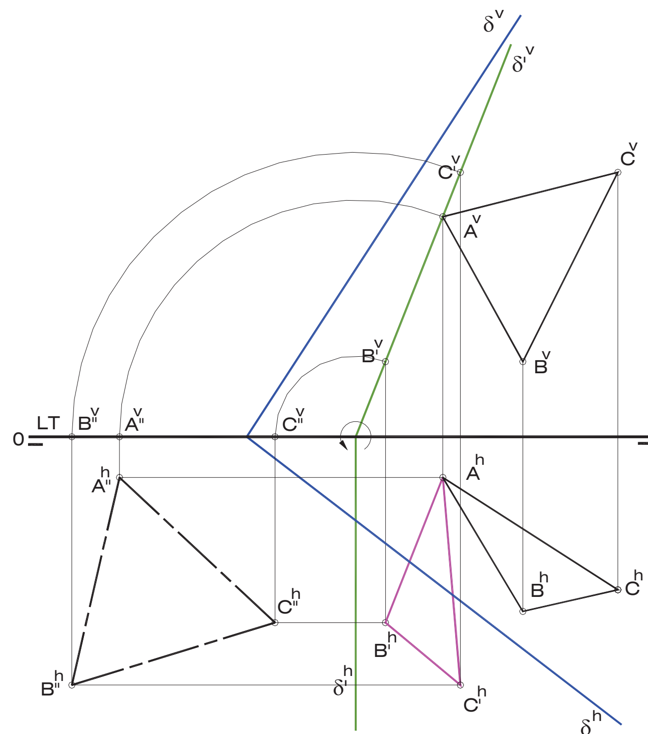


Fig. 2.17-b

CAPÍTULO III

3.1 Paralelismo
3.1.1 Paralelismo entre rectas

Si dos rectas "a" y "b" son paralelas en el espacio, sus proyecciones homónimas en el Sistema Diédrico – y en general en cualquier sistema de proyección cilíndrico – son también paralelas. De manera que si se desea construir por un punto P del espacio una recta "a" paralela a otra recta "b", es suficiente dibujar por la proyección vertical de P una recta b^v paralela a la proyección vertical de la recta "a", y por la proyección horizontal de dicho punto una recta b^h paralela a la proyección horizontal de la recta "a" (Fig. 1)

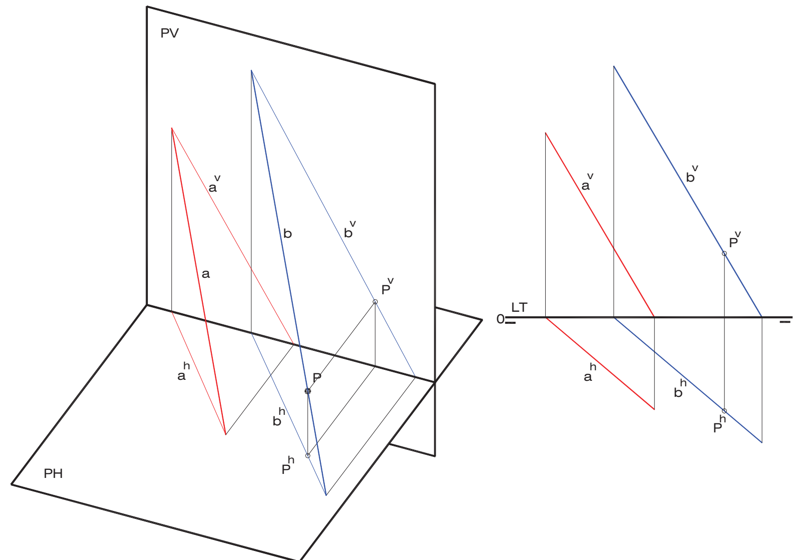


Fig. 3.1: Paralelismo entre rectas.

Lo anterior se aplica a cualquier posición que adopte la recta "a", sólo que en aquellos casos en los que dicha recta es de perfil, se debe generar una nueva proyección de las rectas "a" y "b", como por ejemplo la proyección sobre el plano lateral, con el fin de comprobar que son efectivamente paralelas.

En la Fig. 3.2 se ha construido una recta "b" que pasa por el punto P del espacio y que es paralela al segmento de perfil AB. Para ello se han determinado las proyecciones laterales del punto P y del segmento AB; a continuación se traza por P^l una paralela b^l a A^lB^l que constituye la proyección lateral de la recta pedida, la cual es, evidentemente, de perfil. Como es necesario definir al menos dos puntos sobre ella para que sus proyecciones diédricas queden completamente definidas, se escoge un punto cualquiera Q^l sobre la proyección lateral de "b". De esta forma, las proyecciones de P y Q determinan las proyecciones diédricas de la recta "b".

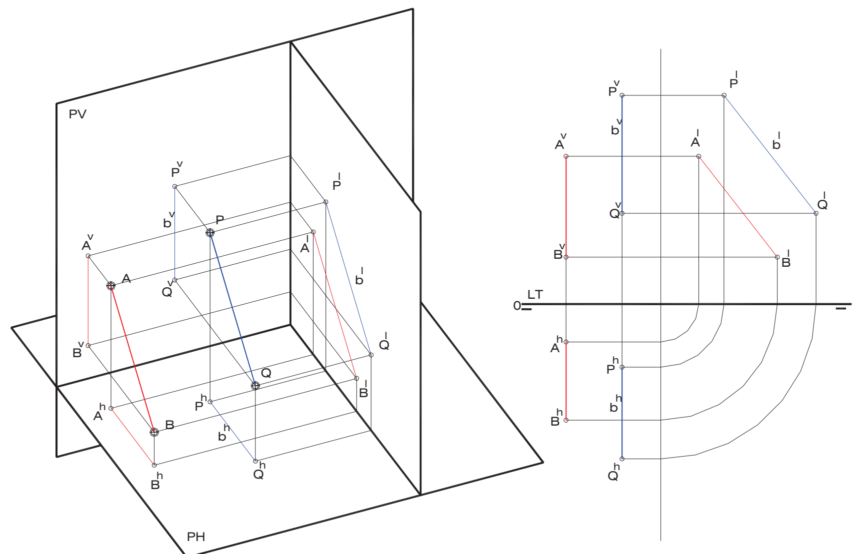


Fig. 3.2 Paralelismo entre Rectas de Perfil.

3.1.2 Paralelismo entre recta y plano

La condición necesaria y suficiente para que una recta “a” sea paralela a un determinado plano δ, es que esa recta “a” sea paralela a una de las infinitas rectas contenidas en dicho plano δ.

De lo anterior se deduce que por un punto cualquiera del espacio P se pueden construir infinitas rectas paralelas a un plano. Por lo tanto, si se quiere construir una de esas rectas es necesario definir alguna otra de sus propiedades o conocer una de sus proyecciones. En la Fig. 3.3 se presenta un ejemplo en el que se ha determinado la proyección vertical de una recta ”a” que pasa por un punto P, partiendo de su proyección horizontal y sabiendo que es paralela al plano ABC. Para ello se traza la proyección horizontal de un recta “r”, paralela a la proyección horizontal de “a”. Seguidamente se determina la proyección vertical de “r” aplicando la condición de pertenencia de recta a plano, es decir, hallando los puntos de corte (1 y 2) entre r^h y las proyecciones horizontales de dos rectas del plano ABC y ubicándolos luego en la proyección vertical de estas rectas. Recuérdese que para que se cumpla la condición de paralelismo entre recta y plano “r” debe pertenecer a ABC.

Finalmente, se construye por P^v una paralela a r^v que viene a ser la proyección vertical de la recta “a”.

Si la recta “a” es una recta paralela al plano horizontal de proyección, será entonces paralela a las rectas horizontales del plano δ. De igual forma, si “a” es paralela al plano vertical, entonces es paralela a las frontales de dicho plano.

Como se ha indicado, por un punto del espacio existen infinitas rectas paralelas a un plano. Todas esas infinitas rectas determinan un segundo plano paralelo al primero, lo que permite establecer la condición de paralelismo entre planos.

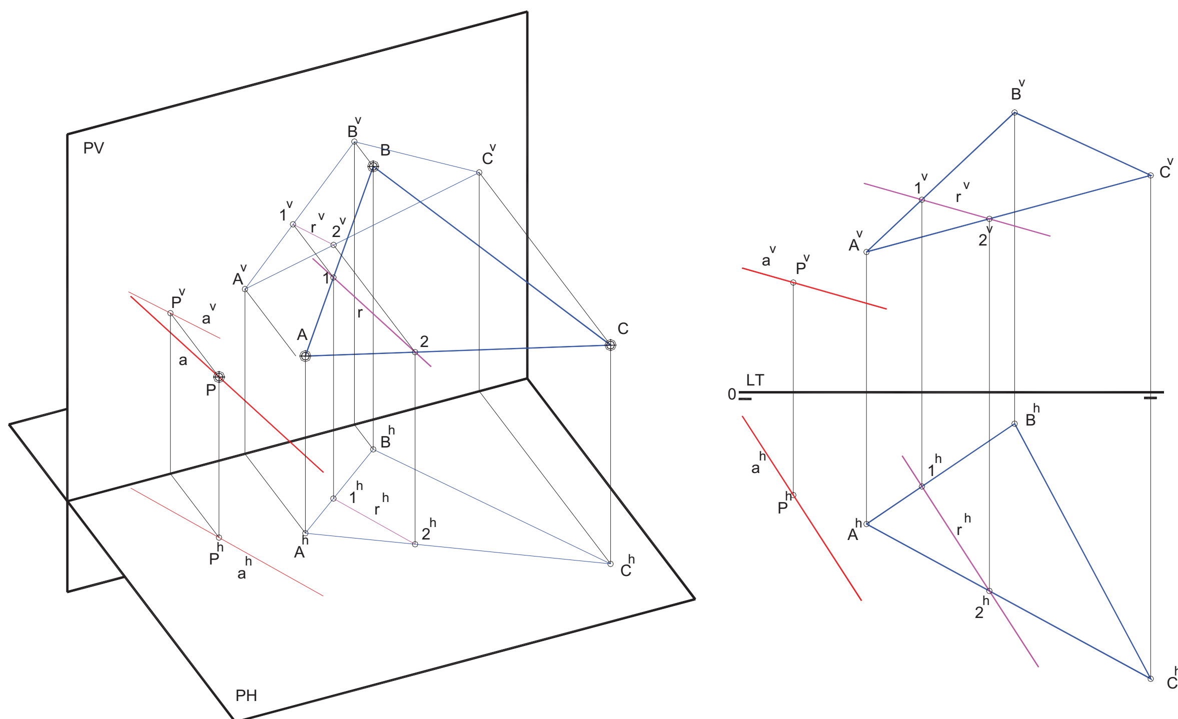


Fig. 3.3: Recta paralela a Plano.

3.1.3 Paralelismo entre planos

Por un punto P exterior a un plano γ se puede construir un único plano δ paralelo a él. La condición necesaria y suficiente para que dos planos δ y γ sean paralelos, es que dos rectas “a” y “b” pertenecientes al primero y no paralelas entre sí, sean paralelas a dos rectas “r” y “s” pertenecientes al segundo. En la Fig. 3.4-a, el plano definido por las rectas “a” y “b” es paralelo al plano ABC, ya que esas rectas son paralelas a los segmentos AB y BC, respectivamente.

Si el plano γ está dado por sus trazas, el procedimiento se reduce a construir por el punto P una recta frontal “f” y una recta horizontal “h” que sean paralelas a las trazas de γ. El plano δ definido por dichas rectas será paralelo a γ (Fig. 3.4-b).

Dos planos paralelos siempre tienen sus trazas homónimas paralelas, con la excepción de aquellos casos los que se trate de planos Paralelos a la Línea de Tierra. Si así fuere, la condición de paralelismo debe ser verificada en una proyección lateral auxiliar (Fig. 3.4-c).

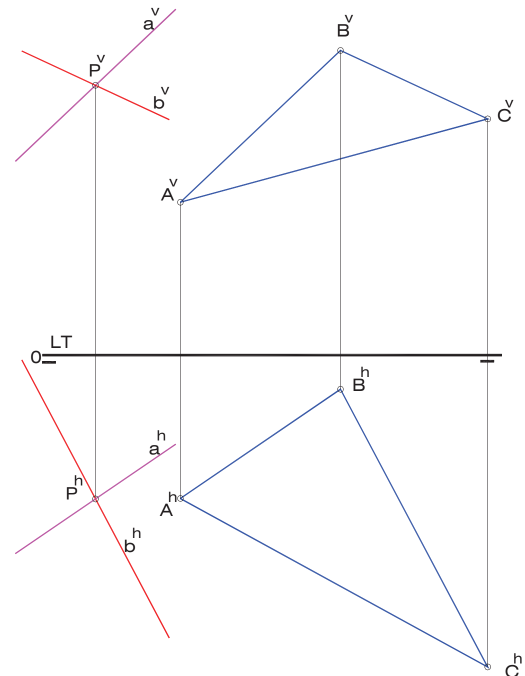


Fig. 3.4-a

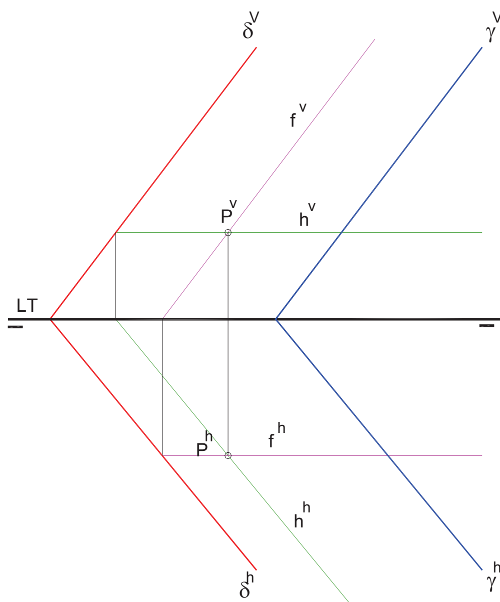


Fig. 3.4-b

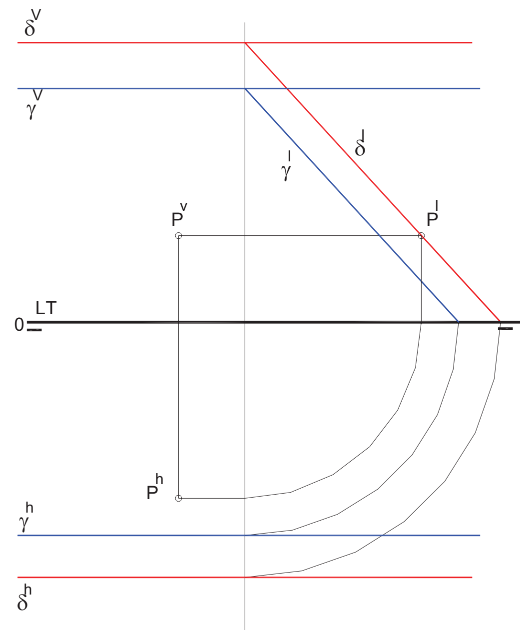


Fig. 3.4-c

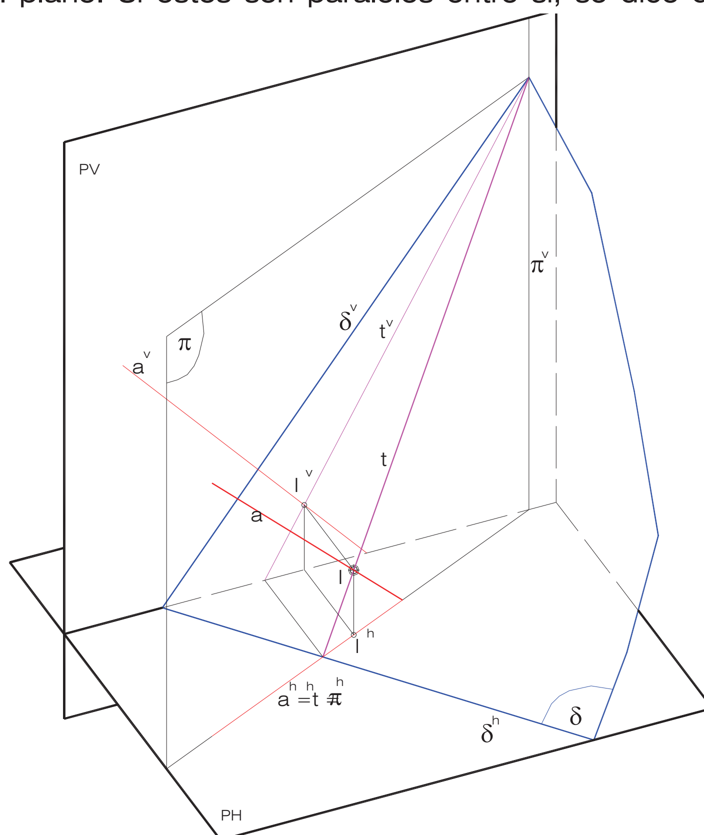
Fig. 3.4: Paralelismo entre Planos.

3.2 Intersección

3.2.1 Intersección entre recta y plano

La intersección entre una recta “a” y un plano δ es un punto I, elemento que debe pertenecer tanto a la recta como al plano. Si estos son paralelos entre sí, se dice que el punto de intersección es impropio.

El método general para determinar esa intersección consiste en construir un plano π que contenga a la recta “a” y luego se determina la recta de intersección “t” entre los planos δ y π; el punto común a las rectas “a” y “t” constituye el punto de intersección buscado. Este procedimiento presenta una notable simplificación si se toma como plano auxiliar π a uno de los dos *planos proyectantes* que pasan por la recta “a” (Fig. 3.5). Sin embargo, en vista de que su aplicación involucra el conocimiento del método de intersección de planos y, al mismo tiempo, este último consiste en la determinación de puntos de intersección entre recta y plano, se expone a continuación un enfoque distinto del problema[2].



Fg. 3.5: Intersección entre Recta y Plano. Método de Plano Proyectante.

Sea un plano cualquiera definido por tres puntos A, B y C y una recta “a” no paralela a él. Considérese una recta “t” contenida en el plano ABC y con una de sus proyecciones confundida con la proyección homónima de “a”. El corte entre la proyecciones no confundidas de esas rectas es la proyección correspondiente del punto de intersección entre “a” y el plano ABC.

El procedimiento seguido para determinar dicho punto en el ejemplo que ilustra la Fig. 3.6, comienza asumiéndose la proyección horizontal de “t” confundida con la proyección horizontal de la recta “a”. A continuación, se ubican los cortes 1^h y 2^h entre aquella y las proyecciones horizontales de las rectas AC y BC del plano ABC y se alinean hasta encontrarlos en las proyecciones verticales de estas rectas (condición de pertenencia de recta a plano). La recta definida por 1^v y 2^v es la proyección vertical de la recta “t”; el corte entre ésta y la proyección vertical de “a” es la proyección vertical del punto de intersección I entre la recta “a” y el plano ABC. Finalmente se halla la proyección horizontal de este punto trazando una referencia perpendicular a la línea de tierra que corta a la proyección horizontal de “a” (igual a la proyección horizontal de “t”).

---

[2] Harry Osers llama a este enfoque el método de la *recta tapada* (Estudio de Geometría Descriptiva Editorial Torino. Caracas, 1991).

Nótese que el plano determinado por la recta “a” y la recta “t” es un plano proyectante horizontal y que la recta “t” es común a este plano y al plano ABC, por lo que, en esencia, se trata del método del *plano proyectante.*

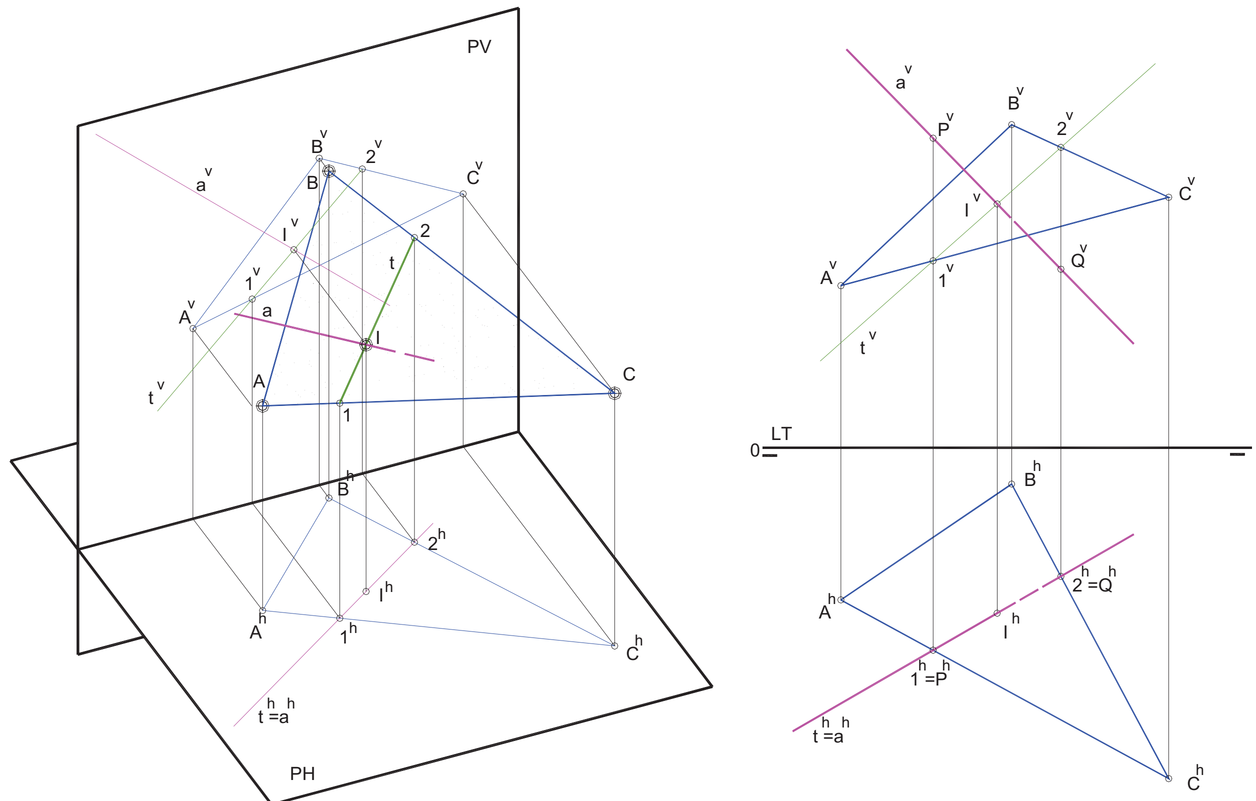


Fig. 3.6: Intersección entre Recta y Plano.

Si se considera al segmento de plano ABC como una superficie opaca, un segmento de la recta “a” será invisible en proyección horizontal, en tanto que otro segmento lo será en la vertical. El cambio en la visibilidad de la recta se verifica, evidentemente en su punto de penetración en el plano ABC.

En la Fig. 3.6 los puntos de corte entre las proyecciones horizontales de “a” y de los segmentos AC y BC, representan las proyecciones horizontales de los puntos 1 y P y los puntos 2 y Q, respectivamente. Siendo que 1 y 2 son puntos pertenecientes al plano ABC, que los puntos P y Q están sobre la recta “a” y que los segmentos 1P y 2Q son de pié, es fácil observar cuáles de ellos son visibles y cuáles no visibles en la proyección horizontal si se comparan sus cotas. Así, el punto P tiene **mayor** cota que 1, por lo que la recta “a” (elemento sobre el cual se encuentra P) es visible en la proyección horizontal del lado izquierdo del punto de intersección (lado en el que se halla P). Por otra parte, Q tiene **menor** cota que el punto 2, de manera que la proyección horizontal de “a” es no visible a la derecha del punto I, ya que de ese lado se encuentra el punto Q.

Mediante un razonamiento análogo, es posible determinar la visibilidad de la recta “a” en la proyección vertical, comparando sus valores de vuelo con relación al segmento de plano ABC.

Si se desea determinar el punto de intersección entre una recta “a” y un plano δ que sea perpendicular a alguno de los planos de proyección principales (PV o PH), se tiene que todos los puntos del plano se proyectarán sobre su traza en el plano de proyección con el que

forma 90°, incluyendo el punto de intersección buscado. Así, si se trata de un plano proyectante horizontal (Fig. 3.7), la proyección horizontal del punto I es el corte entre la proyección horizontal de la recta “a” y la traza horizontal del plano. La proyección vertical de I se encuentra en el corte entre la proyección vertical de “a” y una línea de referencia perpendicular a LT trazada por a^h.

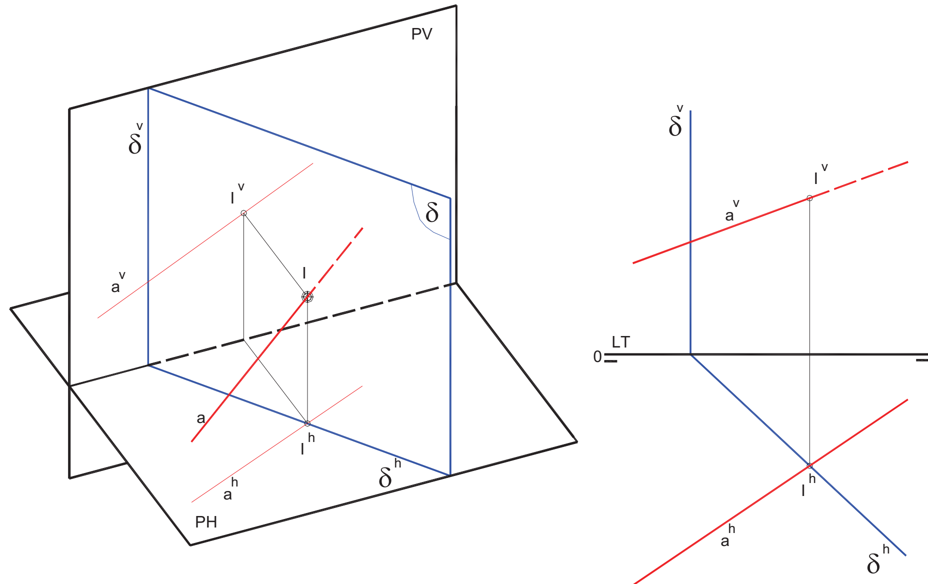


Fig. 3.7: Intersección entre recta y plano Proyectante.

Otro caso particular se presenta si la recta “a”, definida por los puntos A y B, tiene una posición de perfil, ya que las proyecciones de la correspondiente recta “t”, definida por 1 y 2, se confunden con las proyecciones de “a” por ser también de perfil. En tal situación, es preciso generar una nueva proyección – lateral preferiblemente – en la que el punto común a las rectas “a” y “t” pueda ser determinado sin problemas (Fig. 3.8).

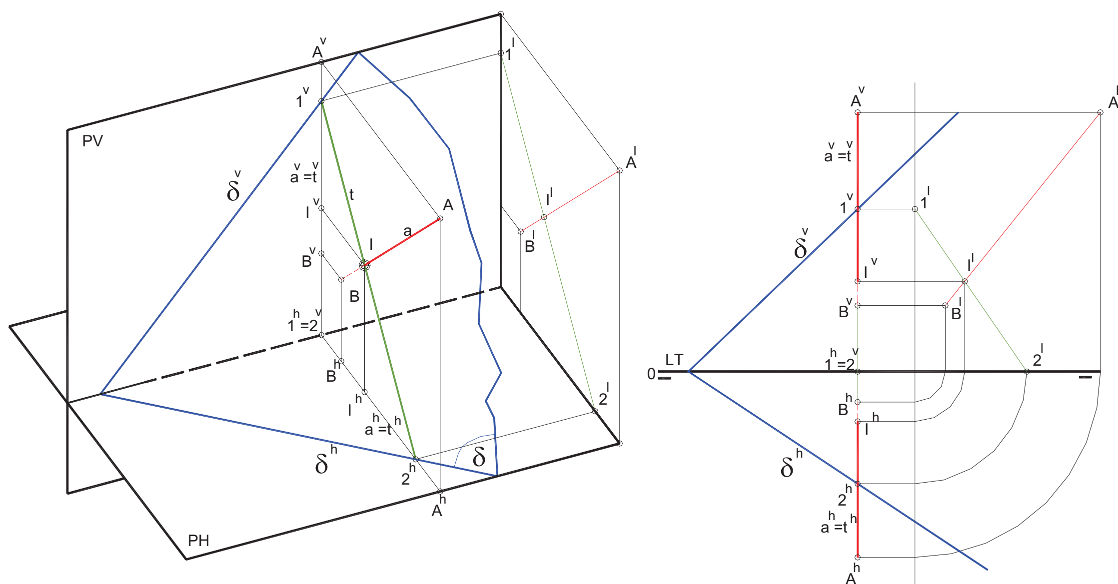


Fig. 3.8: Intersección entre recta de perfil y plano cualquiera.

Finalmente, es necesario señalar que si la recta “a” es perpendicular a uno de los planos de proyección principales resulta conveniente construir un plano auxiliar perpendicular a PH (preferiblemente frontal), si “a” es de pié, o un plano auxiliar perpendicular a PV (preferiblemente horizontal), si “a” es de punta. (Fig. 3.9).

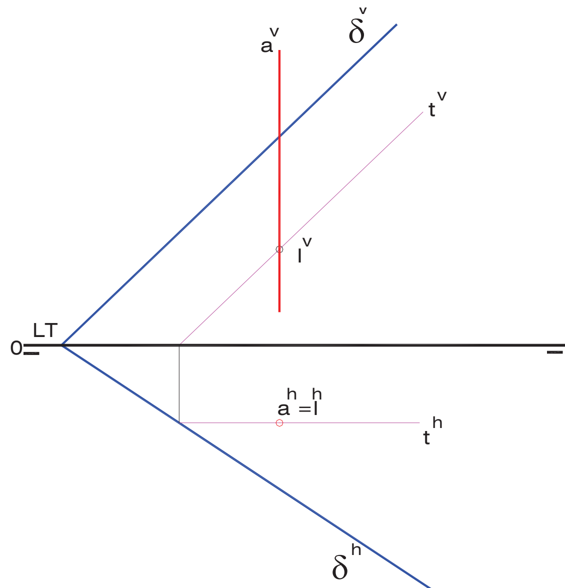


Fig. 3.9: Intersección entre recta de pié y plano cualquiera.

3.2.2 Intersección entre planos

La recta “i” común a dos planos δ y γ puede ser determinada por dos puntos X y Y, quienes son los puntos de intersección entre dos rectas “a” y “b” pertenecientes a δ y el plano γ (Fig. 3.10-a). También se obtiene la misma recta de intersección si “a” y “b” pertenecen a γ, en cuyo caso los puntos X y Y serían los puntos comunes a las rectas “a” y “b” y al plano δ, respectivamente (Fig. 3.10-b). De igual manera, es posible definir la intersección entre los planos si la recta “a” pertenece a δ, siendo X el punto de intersección entre ella y el plano γ, y la recta “b” está contenida en γ, con lo que Y sería el punto común a esta recta y al plano δ (Fig. 3.10-c).

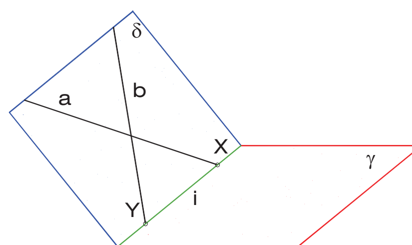


Fig. 3.10-a

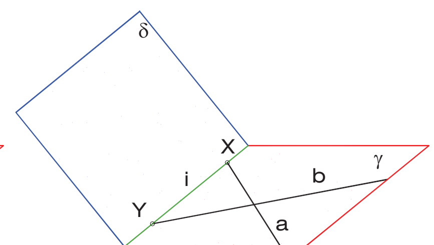


Fig. 3.10-b

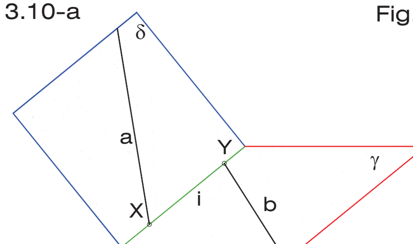


Fig. 3.10-c

Fig. 3.10: Intersección entre planos aplicando sucesiva entre recta y plano intersección.

En la Fig. 3.11 se ha determinado la recta de intersección entre los segmentos de planos ABC y PQR. Para ello se ha comenzado determinando el punto de intersección X entre la recta definida por el segmento QR y el plano ABC, siendo X el punto común a QR y a la recta 12, la cual pertenece al plano ABC y está confundida con QR en proyección horizontal. Seguidamente y siguiendo un procedimiento análogo, se ha encontrado el punto de intersección Y entre la recta definida por el segmento RQ y el plano ABC. La recta de intersección entre los planos ABC y PQR queda determinada por los puntos X y Y.

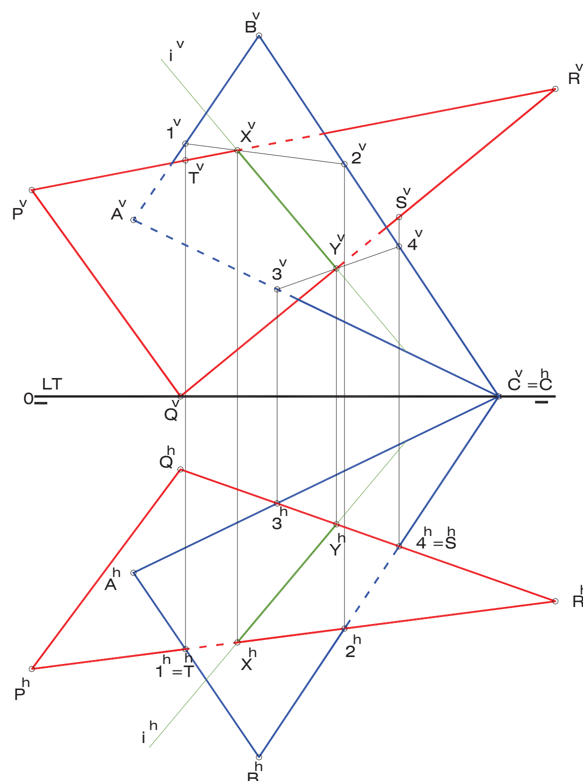


Fig. 3.11: Intersección entre segmentos de planos.

Si se consideran los triángulos ABC y PQR como superficies opacas es necesario realizar un análisis de visibilidad, lo que se traduce en una representación que facilita la lectura de la realidad tridimensional proyectada en el Sistema Diédrico. Dicho análisis consiste en la comparación de los valores de cota y vuelo de puntos convenientemente escogidos en ambos triángulos.

El corte entre las proyecciones horizontales de los segmentos QR y BC es la proyección horizontal de los puntos 4 y S; el primero sobre el segmento BC y el segundo sobre el segmento QR. Al hallar mediante una referencia perpendicular a LT las proyecciones verticales de dichos puntos, se observa que la cota de S es mayor que la cota de 4, lo cual significa que el triángulo PQR, al que pertenece el punto S, está *por encima* del triángulo ABC en el lado izquierdo de la recta de intersección "i", lado del que se ubican los puntos S y 4 seleccionados para realizar el análisis. En consecuencia, la porción de la proyección horizontal del segmento BC comprendida entre los puntos 2 y S debe de ser dibujada con línea de trazos.

Ahora bien, del lado derecho de la recta "i" es el triángulo ABC quien está *por encima* del PQR, ya el punto 1, contenido en el segmento AB, tiene mayor cota que el punto T, perteneciente al segmento PQ. Así, la proyección horizontal del segmento TX debe de ser dibujado empleando línea de trazos.

Realizando un análisis similar para los valores de vuelo, es posible determinar las partes visibles e invisibles del contorno de ambos triángulos en la proyección vertical.

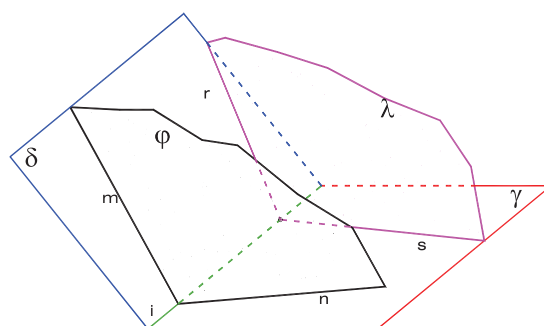


Fig. 3.12: Intersección entre planos aplicando el Teorema General de intersección entre planos.

Otra forma de determinar la recta común a dos planos δ y γ, consiste en determinar las rectas "m" y "n" de intersección entre éstos y un plano auxiliar φ, y las rectas "r" y "s" de intersección entre los planos δ y γ y un segundo plano auxiliar λ. A este método se le conoce como *teorema general de intersección entre planos* (Fig. 3.12). El punto común X a las

rectas “m” y “n” define junto con el punto común Y a las rectas “r” y “s”, la recta de intersección de los planos δ y γ. Si se considera que los planos auxiliares φ y λ son los planos horizontal y vertical de proyección, respectivamente, las rectas “m” y “n” serán las trazas horizontales de δ y γ, en tanto que las rectas “r” y “s” serán las trazas verticales de estos planos. En consecuencia, *si se conocen las trazas de dos planos, su recta de intersección está determinada por los puntos de corte entre sus trazas homónimas.*

En la Fig. 3.13 se muestra un ejemplo en el cual se ha determinado la recta de intersección entre los planos δ y γ a través de los puntos de corte X y Y de las trazas horizontales y verticales, respectivamente. Si un par de trazas homónimas resultasen paralelas, la recta común a ambos planos será entonces una recta frontal o una recta horizontal, según sea el caso.

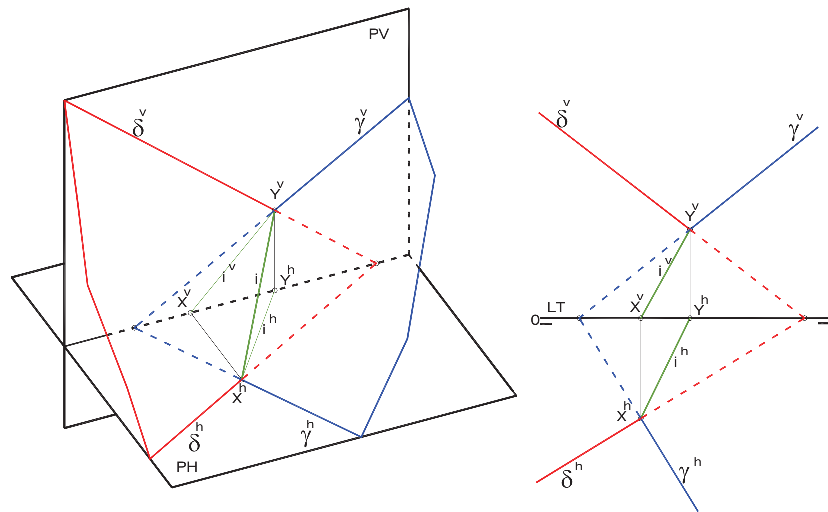


Fig. 3.13: Intersección entre planos dados por sus trazas.

Finalmente, si dos planos cuya recta de intersección se desea hallar son paralelos a la Línea de Tierra, es evidente que dicha recta resulta ser también una recta paralela a LT, siendo necesario generar una proyección lateral en la que es posible determinar el punto común a las trazas laterales de ambos planos, punto éste que representa también la proyección lateral de la recta de intersección buscada (Fig. 3.14).

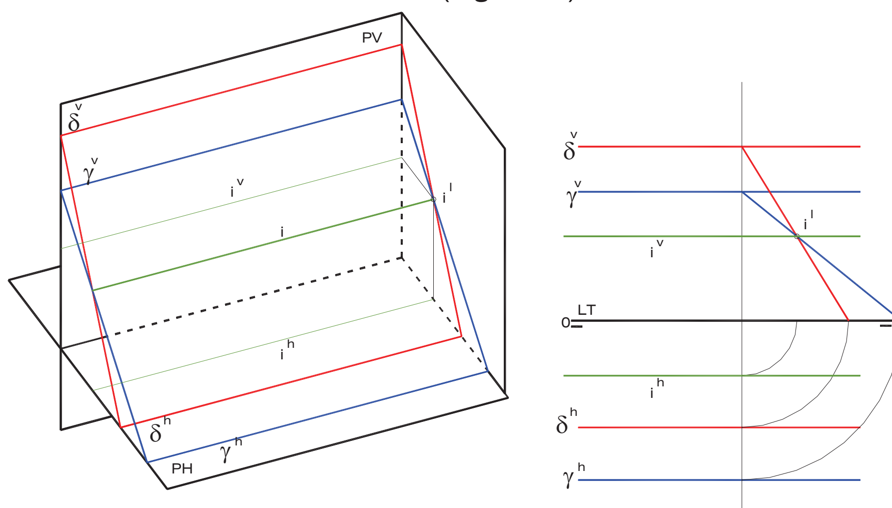


Fig. 3.14: Intersección entre planos paralelos a LT.

3.2.3 Teoremas sobre paralelismo e intersección

1. Si por una recta paralela a un plano se hace pasar un segundo plano que corte al inicial, la intersección de estos dos planos es una recta paralela a la primitiva.
2. Si dos planos paralelos son cortados por un tercero, las intersecciones son dos rectas paralelas.
3. Si dos rectas son paralelas, todo plano que corte a una de ellas corta también a la otra.
4. Si dos planos son paralelos:
   - Toda recta que corta al primero corta también al segundo.
   - Todo plano que corta al primero corta también al segundo.
5. La intersección de dos planos paralelos a una misma recta es otra recta también paralela a ella.
6. Si dos planos paralelos cortan a dos rectas también paralelas, los segmentos intersecados de las rectas son iguales.
7. Si dos rectas cualesquiera son cortadas por un haz de planos paralelos, los segmentos definidos entre los planos son proporcionales.

3.3 Perpendicularidad

3.3.1 Perpendicularidad entre recta y plano

Si una recta "p" es perpendicular a un plano δ entonces formará ángulo recto con todas las rectas contenidas en el plano δ. De allí se desprende la condición de perpendicularidad entre recta y plano: *para que una recta "p" sea perpendicular a un plano δ, es necesario y suficiente que sea perpendicular a por lo menos dos rectas "a" y "b", no paralelas entre sí y contenidas en el plano δ.*

El problema generado por esa condición es que dos rectas que formen entre sí un ángulo recto, no siempre se proyectan en un sistema cilíndrico ortogonal sobre un plano como rectas perpendiculares. Ello solamente ocurre, de acuerdo con el *teorema de las tres perpendiculares*[3], si una de las dos rectas es paralela al mencionado plano de proyección, como "a" en la Fig. 3.15.

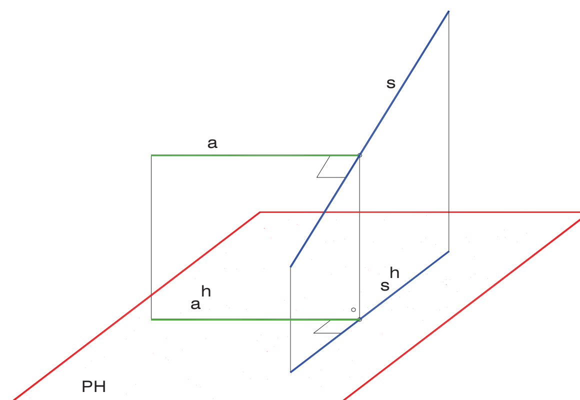


Fig. 3.15: Teorema de las tres perpendiculares

Por tal motivo, si se quiere construir una recta "p" que pase por un punto M del espacio y que sea perpendicular a un plano δ, es necesario, en aras del cumplimiento de la condición de perpendicularidad, escoger un par de rectas contenidas en δ que sean paralelas a los planos de proyección del Sistema Diédrico y que no lo sean entre sí. Estas rectas no pueden

[3] IZQUIERDO A., Fernando. Geometría Descriptiva. Editorial Dossat. Madrid, 1985.

ser otras que una recta frontal “f” y una recta horizontal “h”, es decir, rectas características o notables del plano δ (Fig. 3.16).

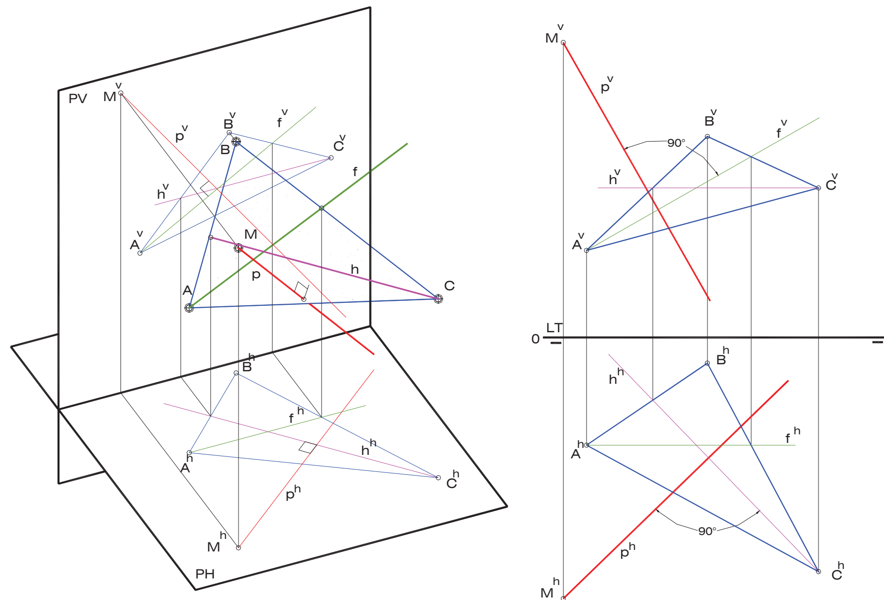


Fig. 3.16: Recta perpendicular a plano cualquiera.

La proyección vertical de la recta “p” resulta ser perpendicular a la proyección vertical de “f”, ya que ésta es paralela a PV; del mismo modo, la proyección horizontal de la recta “p” debe formar un ángulo de 90° con la proyección horizontal de “h”, dado que esta recta es paralela a PH. De lo anterior se infiere que si una recta “p” es perpendicular a un plano δ, se proyecta sobre el plano horizontal como una recta perpendicular a la traza horizontal de δ, en tanto que su proyección sobre el plano vertical forma noventa con la traza vertical de dicho plano. Esta afirmación es válida para cualquier posición que adopte el plano δ, lo que se ilustra en las Fig. 3.17-a, 3.17-b, 3.17-c, 3.17-d, 3.17-e y 3.17-f.

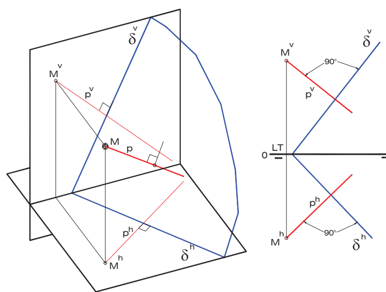


Fig. 3.17-a

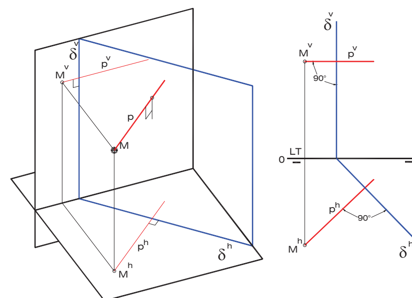


Fig. 3.17-b

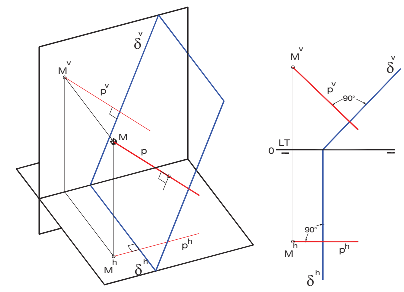


Fig. 3.17-c

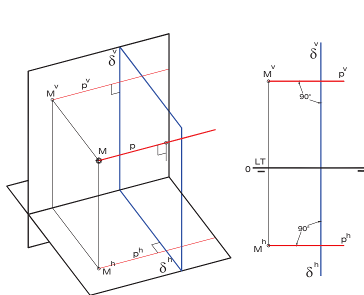


Fig. 3.17-d

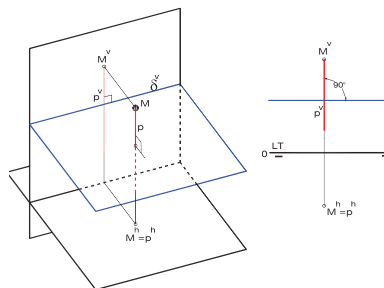


Fig. 3.17-e

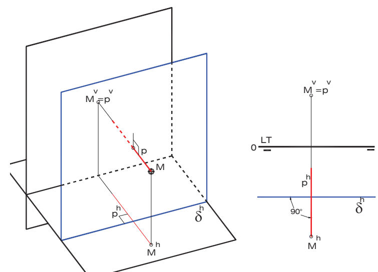


Fig. 3.17-f

Sin embargo, es de resaltar que si el plano δ está en posición paralela a LT (Fig. 3.17-g) la recta "p", que resulta ser de perfil, no queda determinada aplicando este razonamiento, ya que existen infinitas rectas que pasan por M y tienen sus proyecciones perpendiculares a las trazas del plano. Por este motivo, es necesario generar una proyección lateral, en la que la recta "p" se muestra en forma inequívoca perpendicular a la traza lateral de δ. Luego, si se escoge un punto cualquiera N^l sobre la proyección lateral de "p" y se hallan las proyecciones diédricas correspondientes N^h y N^v , se obtienen las proyecciones diédricas de dicha recta "p", determinada por el segmento MN.

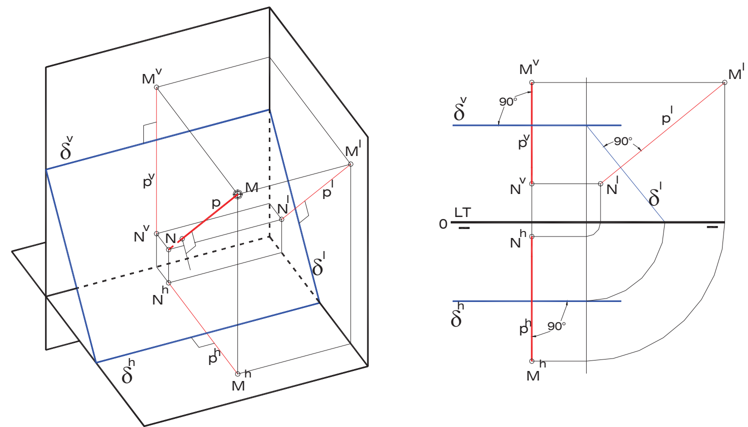


Fig. 3.17-g

La construcción de un plano π que sea perpendicular a una determinada recta "m" y que pase por un punto P del espacio, se reduce al cumplimiento de la condición de perpendicularidad entre recta y plano, es decir, a la construcción de dos rectas no paralelas entre sí y perpendiculares a la recta "m" que se corten en el punto dado P. Como se ha visto, la perpendicularidad entre rectas es una condición que tiene propiedad proyectiva si una de las rectas involucradas se encuentra en varadero tamaño, por esta razón, las rectas a las que hace referencia la condición deben ser dos rectas en posición notable: una paralela a PV y la otra paralela a PH (Fig. 3.18).

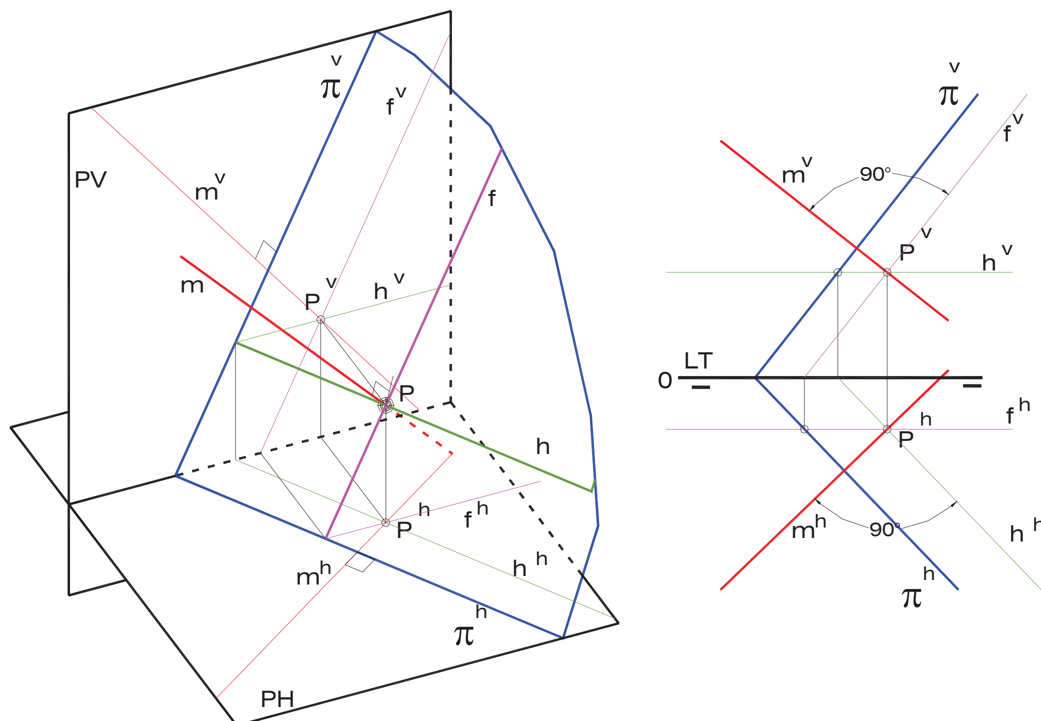


Fig. 3.18: Construcción de un plano perpendicular a una recta.

3.3.2 Perpendicularidad entre planos

Por un punto A del espacio pasan infinitos planos (π_1, π_2, π_3,... π_n) perpendiculares a un plano δ, los cuales tienen como elemento común una recta "p" que contiene al punto A y que es perpendicular al plano δ (Fig. 3.19-a).

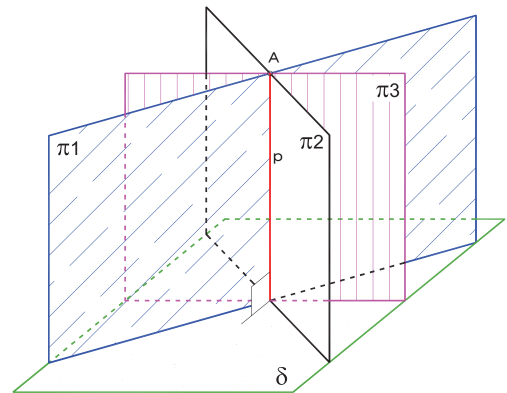


Fig. 3.19-a: Planos perpendiculares.

Esta realidad conlleva al enunciado de la condición de perpendicularidad entre planos: *Si dos planos π y δ son perpendiculares, entonces uno de ellos debe contener al menos una recta "p" perpendicular al otro.*

Si se desea construir un plano π que sea perpendicular a otro plano δ, se debe contar con una recta "m" que pertenezca al plano π para así obtener una única solución. Dicho plano π estará entonces determinado por la recta dada "m" y una recta "p" perpendicular al plano δ, recta ésta que hace cumplir la condición de perpendicularidad entre los planos.

Es necesario que ambas rectas se corten en un punto, por lo que el trazado de las proyecciones de "p" debe realizarse por las proyecciones homónimas de un punto X cualquiera perteneciente a la recta "m" (Fig. 3.19-b).

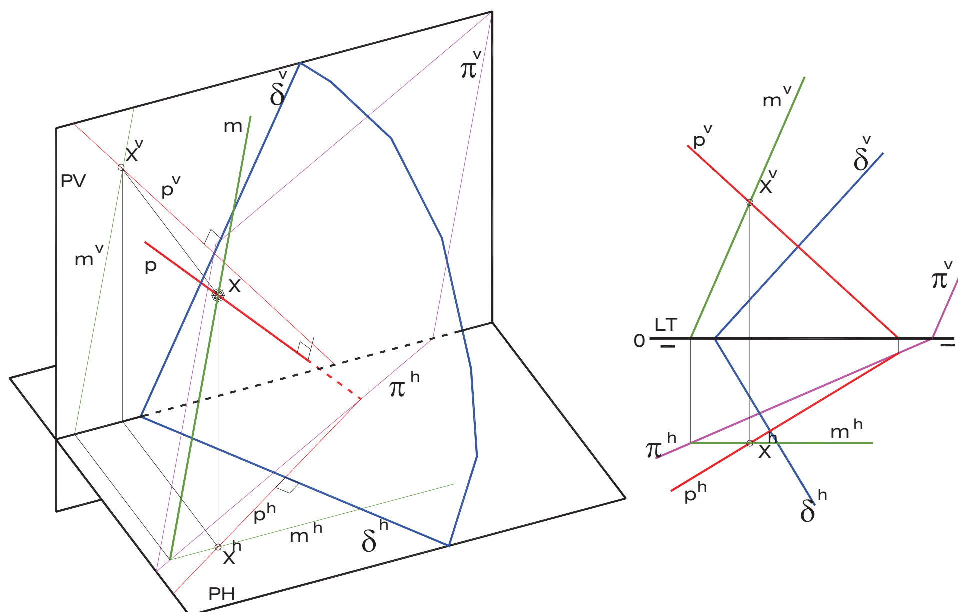


Fig. 3.19-b: Construcción de un plano que sea perpendicular a otro.

3.3.3 Perpendicularidad entre rectas

De acuerdo con el teorema de las tres perpendiculares, al cual ya se ha hecho referencia, si dos rectas son perpendiculares se proyectan sobre un plano formando ángulo recto solamente si una de las dos es paralela al plano en cuestión. Atendiendo a tal afirmación, es

posible resolver cualquier problema de perpendicularidad entre rectas si se generan proyecciones sobre un plano paralelo a una de las dos rectas.

Sea una recta “m” definida por el segmento AB en posición de perfil (Fig. 3.20). Supóngase que es preciso construir una rectas “p” que pase por un punto K del espacio, sea perpendicular a “m” y tenga un punto en común con ésta (secante). En vista de que la recta “m” no es paralela a los planos de proyección principales (PH y PV) y de que la posición de la recta “p” con respecto al sistema de referencia es desconocida, es preciso generar una proyección lateral, en la que las rectas aparecen formando un ángulo recto por ser “m” de perfil. Así que se traza por K^l una perpendicular a m^l que la corta en el punto I^l, proyección lateral del punto común a las rectas. Luego, se hallan las proyecciones de I sobre las proyecciones homónimas de “m”, quedando determinada la recta “p” por las proyecciones del segmento KI.

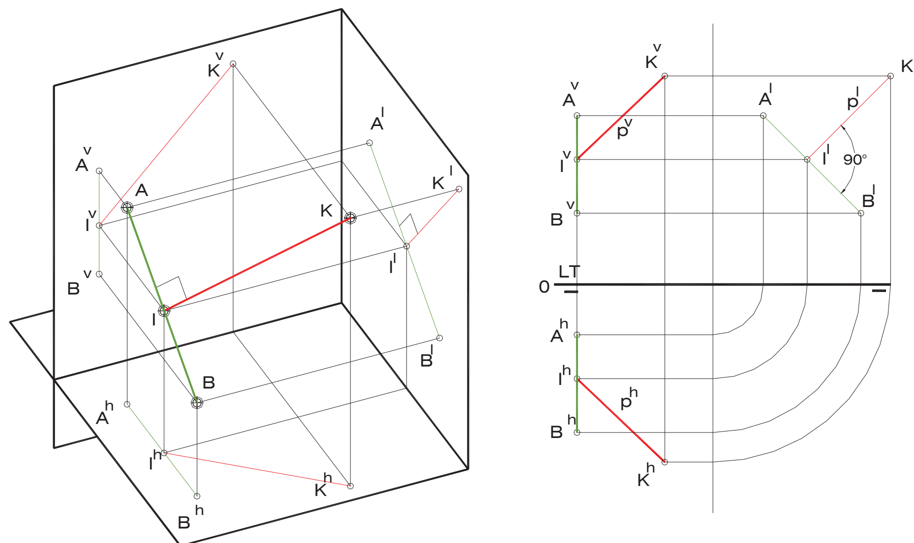


Fig. 3.20: Recta perpendicular a una recta de perfil.

Si la recta “m” tiene una posición accidental, la solución pasa por generar una proyección auxiliar sobre un nuevo plano de proyección paralelo a la recta “m”. En la Fig. 3.21-a se ha creado un sistema LT2 compuesto por PV y el mencionado plano auxiliar, sistema en el que la recta “m” es horizontal, por lo que es posible trazar la recta p^2 por K^2 formando noventa grados con m^2.

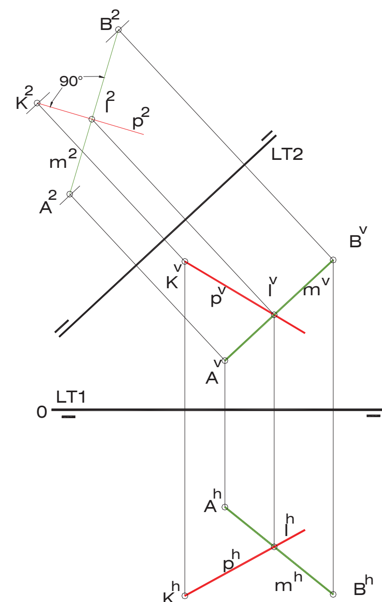


Fig. 21-a

El corte resultante (I^2) es la proyección auxiliar del punto común a las rectas “m” y “p”; la proyección vertical de ese punto se obtiene trazando una referencia perpendicular a LT2 que corta a la proyección vertical de “m”, del mismo modo, la proyección horizontal de I se obtiene dibujando una perpendicular a LT1 sobre la proyección horizontal de “m”.

Por otra parte, es posible determinar la recta “p” si se tiene en cuenta que todas las rectas que pasan por el punto K y son perpendiculares a la recta “m”, incluyendo la recta “p” que la corta, determinan un

plano π, que es, naturalmente, perpendicular a la reta "m". De manera que el procedimiento seguido para determinar dicha recta "p" utilizando este *Lugar Geométrico*[4] es el siguiente (Fig. 3.22-b).

1. Construir un plano π perpendicular a la recta "m" y que contenga el punto K; esto se hace mediante una frontal y una horizontal perpendiculares a "m".
2. Determinar el punto I de intersección entre la recta "m" ye el plano π.
3. La recta "p" queda determinada por el segmento KI.

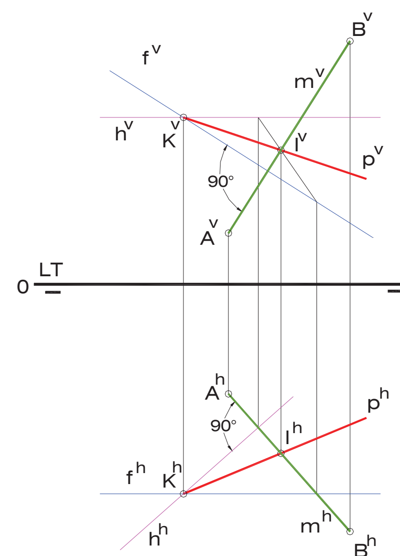


Fig. 21-b

3.3.4 Teoremas sobre perpendicularidad

1. Si dos rectas son paralelas, todo plano perpendicular a una de ellas lo es también a la otra. De igual forma, si dos planos son paralelos, toda recta perpendicular a uno de ellos lo es también al otro.
2. Si una recta es perpendicular a un plano, toda perpendicular a esta recta es paralela al plano o está contenida en él.
3. Si dos planos π y δ son perpendiculares a un tercer plano γ, su intersección también lo es.
4. Teorema de las tres perpendiculares: si por el pie O de la perpendicular a un plano se traza de nuevo la perpendicular "r" a una recta cualquiera "s" del plano. La recta "r'" que une al corte de "s" y "r'" con un punto cualquiera A de la recta primitiva, es también perpendicular a la recta elegida del plano.
5. Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que contenga a dicha recta, o sea paralelo a ella, es perpendicular al plano inicial.
6. Por una recta oblicua a un plano, sólo se puede trazar conteniéndola, un plano perpendicular al dado.
7. Si dado un punto exterior a un plano se trazan la perpendicular al mismo y diversas oblicuas, se obtienen las siguientes consecuencias:
   - Dos oblicuas cuyos pies distan lo mismo del pie de la perpendicular son iguales.
   - La perpendicular es la más corta.
   - De dos oblicuas que se alejen distinto, es mayor la que tenga mayor distancia del pie de la perpendicular.

3.4 Problemas Métricos

En geometría son comunes los ejercicios que implican como solución el valor de una de las siguientes magnitudes: longitud, amplitud de ángulo, área y volumen, los cuales se conocen como problemas métricos. Además, esas magnitudes son elementos clave en el conjunto de variables que conforman un problema típico de ingeniería.

A continuación se presentan algunos de los problemas métricos más significativos de la geometría del espacio, relacionados con la determinación de distancias y ángulos entre elementos geométricos básicos, con los correspondientes métodos a seguir para encontrar su solución, los cuales se fundamentan en las relaciones geométricas estudiadas (paralelismo, intersección y perpendicularidad).

[4] Ver punto 3.5 en este mismo capítulo.

Las figuras que acompañan al texto en esta sección son representaciones genéricas de la realidad espacial, sin incluir, salvo excepciones, el dibujo en el sistema de doble proyección ortogonal, dado que los procedimientos expuestos son básicamente los mismos que ya se han explicado en puntos anteriores.

3.4.1 Distancias

Cuando se habla de la distancia entre dos elementos geométricos siempre se hace referencia a la *menor distancia* que hay entre ellos. Por tal motivo, su determinación debe realizarse sobre un segmento de línea recta.

El problema más simple es el que consiste en la determinación de la menor distancia que hay entre dos puntos A y B del espacio; este valor de distancia no es más que la longitud del segmento de recta cuyos extremos son los puntos A y B. Es evidente que si el mencionado segmento se encuentra en posición oblicua con relación a ambos planos de proyección, es preciso aplicar alguno de los métodos estudiados para la determinación de verdaderos tamaños de segmentos: Abatimiento, Introducción de Nuevos Planos de Proyección (Cambio de Plano) y Giro.

A continuación se presentan los procedimientos que llevan a la solución de los problemas básicos de cálculo de distancias.

1. **Distancia entre un punto A y un plano** δ (Fig. 3.22)

   La menor distancia que hay entre un punto A y un plano δ se halla sobre una perpendicular a este plano trazada por el punto A. El procedimiento es el siguiente:
   - Construir una recta “p” que pase por el punto A y sea perpendicular al plano δ.
   - Determinar el punto de intersección I entre la recta “p” y el plano δ.
   - Hallar el verdadero tamaño del segmento AI, el cual constituye la menor distancia buscada.

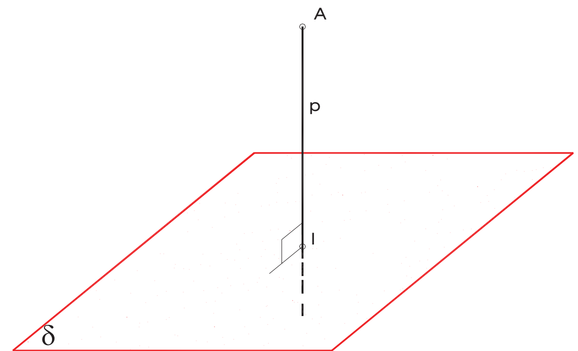


Fig. 3.22: Distancia entre un punto y un plano.

2. **Distancia entre dos planos paralelos** δ **y** π (Fig. 3.23)

   La menor distancia entre dos planos paralelos se encuentra sobre una perpendicular a ambos planos. Los pasos a seguir para determinar tal distancia son los siguientes:
   - Construir una recta “p” perpendicular a ambos planos que pase por cualquier punto del espacio.
   - Determinar los puntos de intersección I_1 e I_2 entre la recta “p” y los planos δ y π, respectivamente.
   - Hallar el verdadero tamaño del segmento I_1I_2 , el cual es igual a la menor distancia buscada.

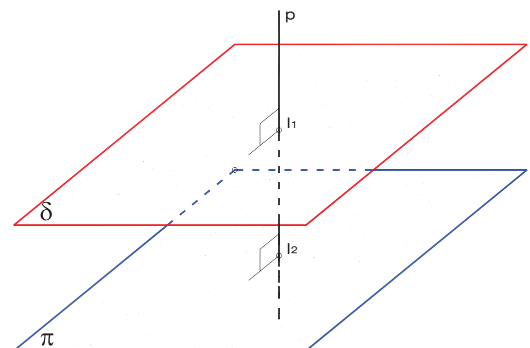


Fig. 3.23: Distancia entre planos paralelos.

3. **Distancia entre una recta "m" y un plano δ paralelo a ella** (Fig. 3.24)

La menor distancia entre una recta y un plano paralelo a ella se halla sobre una perpendicular común a ambos elementos. Para determinarla, se siguen los siguientes pasos:

- Seleccionar un punto cualquiera X sobre la recta "m"
- Trazar por el punto X una recta "p" perpendicular al plano δ, que lo será también con respecto a la recta "m" por ser ésta paralela al plano.
- Determinar el punto de intersección I entre la recta "p" y el plano δ.
- Hallar el verdadero tamaño del segmento XI, que será igual a la distancia pedida.

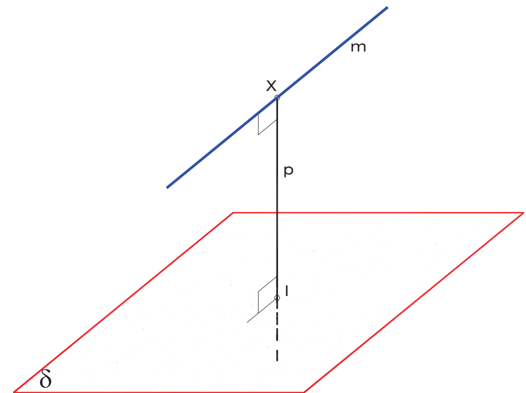


Fig. 3.24: Distancia entre una recta y un plano paralelo a ella.

4. **Distancia entre un punto A y una recta "m"** (Fig. 3.25)

La menor distancia entre un punto y una recta se halla sobre una perpendicular a ésta trazada por el punto. Ambas rectas deben de ser secantes.

- Construir por el punto A una recta "p" perpendicular a la recta "m" que la corte en el punto I. Esto se hace trazando un plano auxiliar ε que contenga al punto A y sea perpendicular a la recta "m", para luego determinarse el punto de intersección I entre ésta y el plano ε.
- Hallar el verdadero tamaño del segmento AI, que será igual a la distancia buscada.

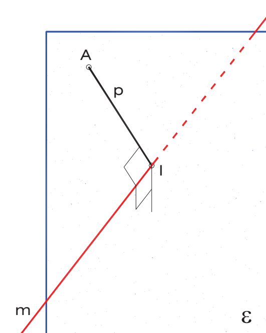


Fig. 3.25: Distancia entre un punto y una recta.

Otra forma de resolver este problema consiste en determinar el verdadero tamaño del plano formado por el punto A y la recta "m", aplicando Abatimiento, Giro o Cambio de Plano, y trazar la recta "p" en la nueva proyección formando 90° con "m", obteniéndose así el punto de corte I. Además, en esa nueva proyección el segmento XI se encuentra en verdadero tamaño, lo que representa la respuesta a la interrogante inicial.

5. **Distancia entre dos rectas paralelas "m" y "n"** (Fig. 3.26)

La menor distancia entre dos rectas paralelas se encuentra sobre una perpendicular común a ambas, contenida en el plano que ellas definen. A continuación se expone el procedimiento a seguir:

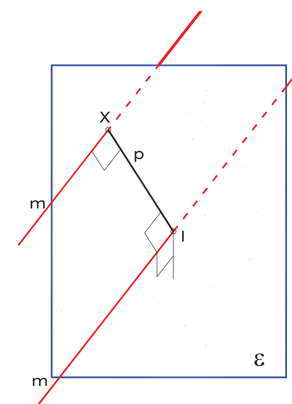


Fig. 3.26: Distancia entre dos rectas paralelas.

- Seleccionar un punto cualquiera X sobre la recta “m”
- Trazar por el punto X una recta “p” perpendicular a la recta “n” que la corte en el punto I.
- Hallar el verdadero tamaño del segmento XI, que será igual a la menor distancia entre las rectas paralelas “m” y “n”.

Del mismo modo que en el caso anterior, este problema puede ser resuelto mediante la determinación del verdadero tamaño del plano formado por las rectas “m” y “n”.

6. **Distancia entre dos rectas que se cruzan “m” y “n”** (Fig. 3.27)

La menor distancia entre dos rectas que se cruzan “m” y “n” (no secantes) se halla sobre la recta perpendicular común a ambas. Por otra parte, esa distancia es igual a la que hay entre una de las rectas y un plano paralelo a ella que contiene a la otra. El siguiente procedimiento se basa en esta última afirmación:

- Construir un plano δ que contenga a una de las rectas, “m” por ejemplo, y sea paralelo a la otra, es decir, a “n”. Esto se hace trazando una recta “s” paralela a “n” por un punto cualquiera perteneciente a la recta ”m”.
- Seleccionar un punto cualquiera X sobre la recta “n”.
- Trazar por el punto X una recta “p” perpendicular al plano δ.
- Determinar el punto de intersección I entre la recta “p” y el plano δ.
- Hallar el verdadero tamaño del segmento XI, que será igual a la distancia pedida.

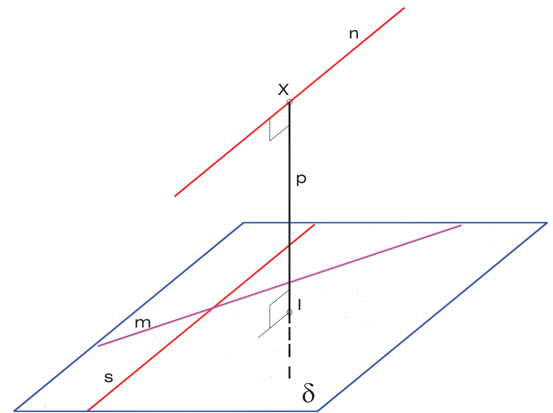


Fig. 3.27: Distancia entre dos rectas que se cruzan.

3.4.2 Ángulos

La determinación del ángulo entre diferentes elementos geométricos (rectas y planos) constituye una aplicación de las relaciones geométricas estudiadas, así como de la determinación del verdadero tamaño de planos.

Los ángulos formados entre una recta y los planos de proyección que componen el Sistema Diédrico, se han determinado al estudiar los métodos empleados en la determinación del verdadero tamaño de segmentos de recta oblicuos.

Del mismo modo, los ángulos que un plano cualquiera forma con los de proyección se encuentran estudiando las rectas de máxima pendiente y de máxima inclinación de dicho plano, tema ya tratado en esta obra.

Siempre es posible dar dos respuestas a un determinado problema: el ángulo ϕ y su complemento (180°-ϕ); cualquiera de esas dos respuestas se considera correcta.

A continuación se presentan los procedimientos que conducen a la solución de los problemas básicos de determinación de ángulos entre rectas, entre recta y plano y entre planos.

1. **Ángulo entre dos rectas secantes "m" y "n"** (Fig. 3.28-a)

El ángulo ϕ que se forma entre dos rectas secantes "m" y "n" no se proyecta en verdadera magnitud si el plano δ que determinan ambas rectas no es paralelo a uno de los planos de proyección. En tal situación, es indispensable emplear alguno de los métodos estudiados (Abatimiento, Introducción de Nuevos Planos de Proyección o Cambio de Plano y Giro) para obtener el valor de dicho ángulo.

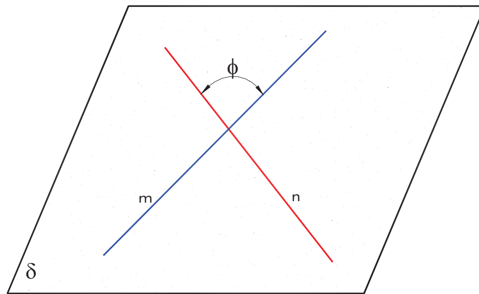


Fig. 3.28-a: Ángulo entre rectas secantes.

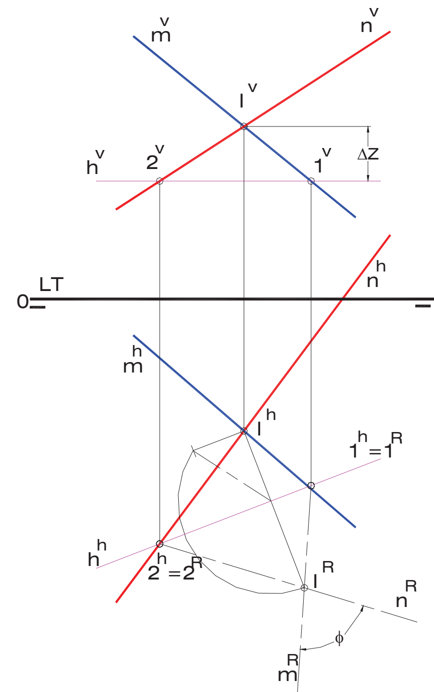


Fig. 3.28-b: Ángulo entre rectas secantes. Aplicación en el Sistema Diédrico.

En la Fig. 28-b se muestra un ejemplo en el que se ha determinado la verdadera magnitud del ángulo ϕ, formado entre dos rectas oblicuas "m" y "n", mediante el abatimiento del plano mn en torno a una recta horizontal "h".

Es evidente que se debe determinar la proyección abatida del punto I, ya que es común a las rectas "m" y "n". Por otra parte, los puntos 1 y 2 son los cortes entre las rectas "m" y "n" y el eje de abatimiento "h", respectivamente, por lo que sus proyecciones abatidas coinciden con sus proyecciones horizontales. Finalmente, el ángulo formado entre m^R y n^R es el ángulo pedido en verdadera magnitud.

2. **Ángulo entre dos rectas que se cruzan "m" y "n"** (Fig. 3.29)

El ángulo ϕ que se forma entre dos rectas cruzadas (no secantes) "m" y "n" es igual al que se forma entre dos rectas secantes paralelas a ellas. Por ello, para determinar dicho ángulo, es suficiente escoger un punto cualquiera X sobre una de las rectas, "m" por ejemplo, y construir una recta "s" paralela a la otra que pase por ese punto. Luego, el ángulo ϕ formado por las rectas "m" y "s" es igual al ángulo buscado y, para determinarlo, se procede de la misma forma que en el caso anterior.

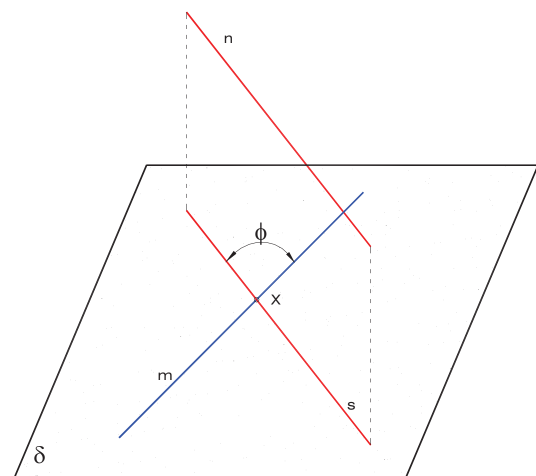


Fig. 3.29: Ángulo entre dos rectas que se cruzan.

3. **Ángulo entre una recta "m" y un plano** δ (Fig. 3.30)

El ángulo ϕ que se forma entre una recta "m" y un plano δ es el formado entre la recta "m" y una recta "i", siendo ésta el resultado de la intersección entre un plano π y el plano δ. El mencionado plano π contiene a la recta "m" y es perpendicular al plano δ.

El procedimiento a seguir para resolver este problema es el siguiente:

- Seleccionar un punto cualquiera X sobre la recta "m".
- Construir una recta "p" que pase por X y sea perpendicular al plano δ. El plano π queda determinado por las rectas "m" y "p".
- Determinar los puntos de intersección I_1 e I_2 entre las rectas "m" y "p" y el plano δ, respectivamente. Tales puntos definen la recta de intersección "i" entre los planos δ y π.
- Hallar el ángulo ϕ formado entre las rectas "m" e "i", que es el ángulo que se forma entre la recta "m" y el plano δ. Para ello se procede como en el punto 1 de esta sección.

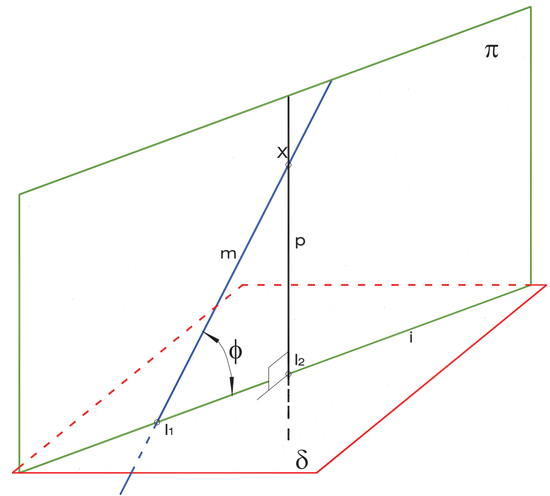


Fig. 3.30: Ángulo entre una recta y un plano.

4. **Ángulo entre dos planos δ y** γ (Fig. 3.31)

El ángulo ϕ que se forma entre dos planos δ y γ es el formado entre las rectas de intersección entre los planos δ y γ con un tercer plano π. Éste último es un plano perpendicular a aquellos, o lo es lo mismo, perpendicular a la recta de intersección entre ellos.

Por otra parte, el ángulo formado entre una recta "p" perpendicular al plano δ y una recta "q" perpendicular al plano γ, es igual al ángulo ϕ.

Atendiendo a estas afirmaciones, es posible proceder de dos formas diferentes para llegar a la solución de este problema.

El primero de los procedimientos es el siguiente (Fig. 3.31-a):

- Determinar la recta de intersección "i" entre los planos δ y γ.
- Construir un plano π perpendicular a la recta "i" que pase por cualquier punto del espacio.
- Determinar la recta de intersección "i_1" entre los planos π y δ.
- Determinar la recta de intersección "i_2" entre los planos π y γ.

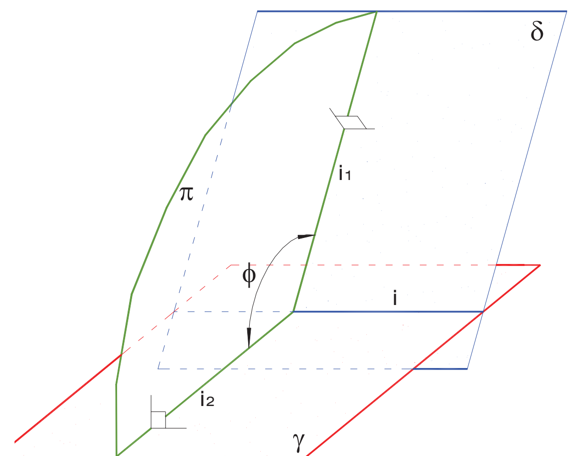


Fig. 3.31-a: Ángulo entre dos planos. Primer procedimiento.

- Hallar el ángulo formado entre las rectas "i_1" e "i_2", que es el ángulo formado entre los planos δ y γ.

El segundo procedimiento es el siguiente (Fig. 3.31-b):

- Escoger un punto cualquiera del espacio X.
- Construir por el punto X una recta "p" perpendicular al plano δ y una recta "q" perpendicular al plano γ. Nótese que las rectas así construidas determinan un plano π perpendicular a los planos δ y γ.
- Determinar el ángulo formado entre las rectas "p" y "q", el cual es igual al ángulo formado entre los planos δ y γ.

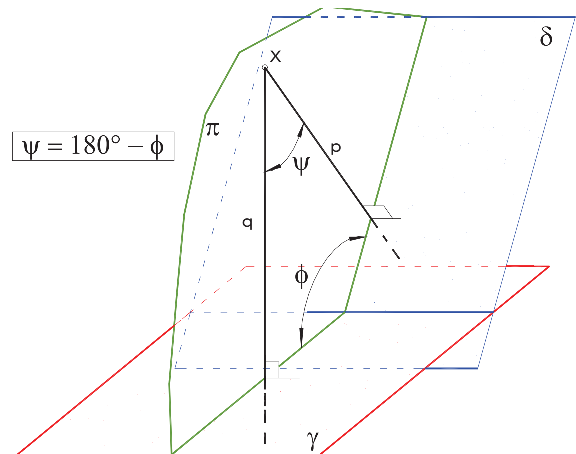


Fig. 3.31-b: Ángulo entre dos planos. Segundo procedimiento.

3.5 Lugares Geométricos
3.5.1 Concepto

Un *lugar geométrico* es un elemento o figura geométrica cuyos puntos cumplen con una determinada condición o ley.

Existen infinidad de lugares geométricos, tanto si se trabaja en el plano como en el espacio. Por ejemplo, una circunferencia puede ser definida como el *lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto de ese plano denominado centro.* La condición o ley que cumplen todos los puntos pertenecientes a esa circunferencia es precisamente su equidistancia del centro.

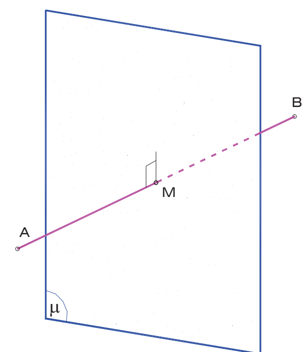


Fig. 3.32: Plano mediador del segmento AB.

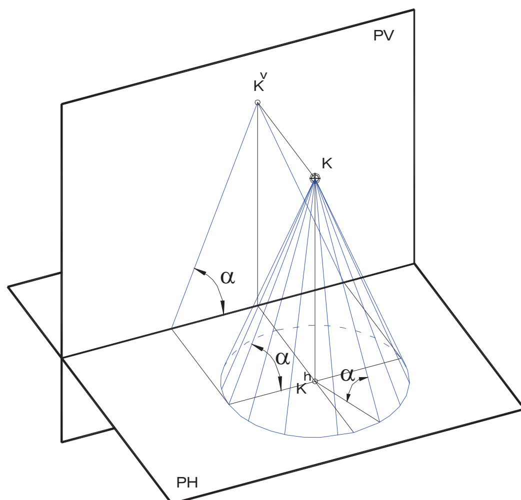


Fig. 3.33: Rectas que pasan por K y forman un mismo ángulo α con PH.

De igual forma se puede establecer ejemplos sencillos de lugares geométricos en tres dimensiones:

- El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de dos puntos A y B es un plano μ perpendicular al segmento AB y que pasa por su punto medio M. Este plano se conoce como *plano mediador* del segmento AB[5] (Fig. 3.32).
- El lugar geométrico de las rectas del espacio que pasan por un punto K y forman un ángulo α con el plano horizontal de proyección, es una superficie cónica de revolución de vértice K cuyas generatrices forman un

[5] RONDÓN R., Alicia y TÉLLEZ, Mary. Sistemas de Representación. Universidad de Los Andes.

ángulo α con dicho plano horizontal (Fig. 3.33).

- El lugar geométrico de las rectas del espacio que pasan por un punto K y cortan a una recta “m”, es el plano determinado por el punto K y esa recta “m” (Fig. 3.34).
- El lugar geométrico de las rectas del espacio que cortan a una recta “a” y son paralelas a otra recta “m”, es un plano δ que contiene a la recta “a” y es paralelo a la recta “m” (Fig. 3.35).
- El lugar geométrico de las rectas del espacio que pasan por un punto K y son perpendiculares a otra recta “m”, es un plano π perpendicular a la recta “m” que pasa por el punto K (Fig. 3.36).

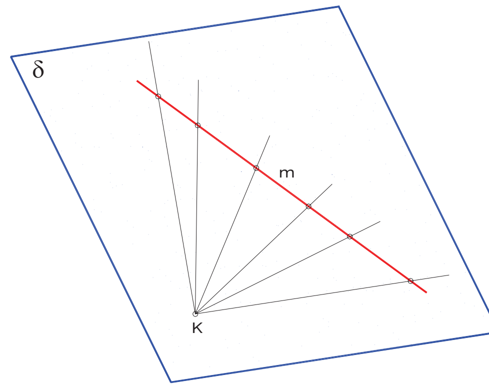
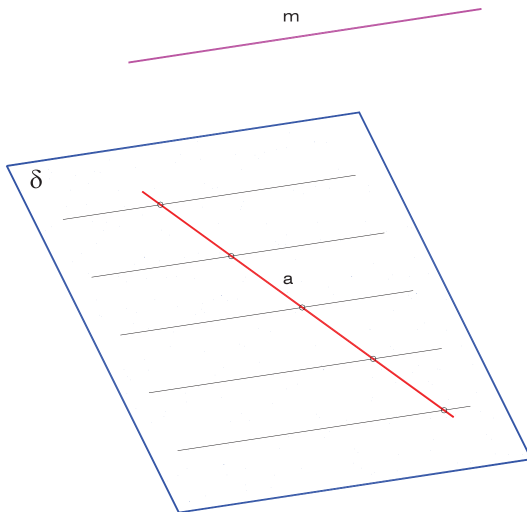


Fig. 3.34: Rectas que pasan por K y cortan a la recta "m".



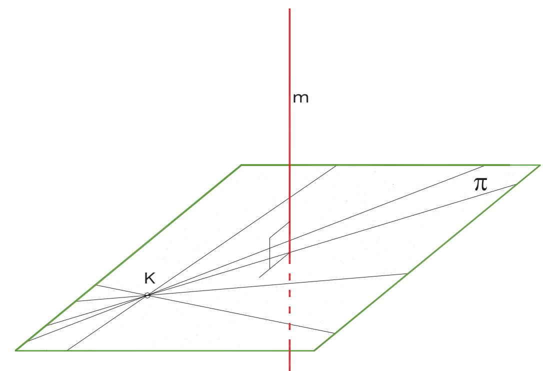


Fig. 3.35: Rectas que cortan a una recta "a" y son paralelas a la recta "m".

Fig. 3.36: Rectas que pasan por K y son perpendiculares a la recta "m".

El conocimiento y aplicación de los lugares geométricos es una condición *sine qua non* para la resolución de problemas geométricos complejos en tres dimensiones: construcción de poliedros, construcción de superficies regladas desarrollables y alabeadas, construcción de superficies de doble curvatura, intersección de superficies, etc.

3.5.2 Aplicaciones

1. Construir una recta “s” que corte a las rectas “a” y “b” (no coplanares) y sea paralela a la recta “m” (Fig. 3.37)

   La recta “s” es la intersección entre dos planos δ, paralelo a la recta “m” y contiene a la recta “a”, y γ, paralelo a la recta “m” y contiene a la recta “b”. Como es natural, dicha recta “s” debe pasar por el punto de intersección entre la recta “a” y el plano γ y por el punto de intersección entre la recta “b” y el plano δ, lo que da lugar al siguiente procedimiento:

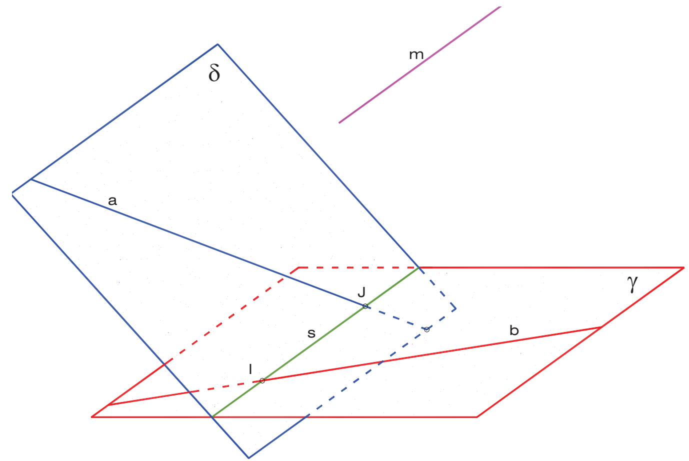


Fig. 3.37: Recta que corta a dos rectas "a" y "b" y es paralela a otra recta "m".

   Se construye en primer lugar un plano δ que contenga a la recta “a” y sea paralelo a la recta “m”. Luego se determina el punto de intersección I entre la recta “b” y el plano δ. Finalmente, se traza una recta paralela a “m” que pase por el punto I, la cual es la recta “s” buscada.

2. Construir una recta “s” que pase por un punto K y corte a las rectas “a” y “b”, no coplanares (Fig. 3.38)

   La recta “s” es la intersección entre un plano δ, definido por el punto K y la recta “a”, y el plano γ, definido por el punto K y la recta “b”. Además, dicha recta debe pasar por el punto de intersección entre la recta “a” y el plano γ y por el punto de intersección entre la recta “b” y el plano δ, lo que da lugar al siguiente procedimiento:

   Se determina el punto de intersección I entre la recta “a” y el plano γ determinado por el punto K y la recta “b”. Luego se construye la recta definida por el punto K y el punto I, que será la recta “s” buscada.

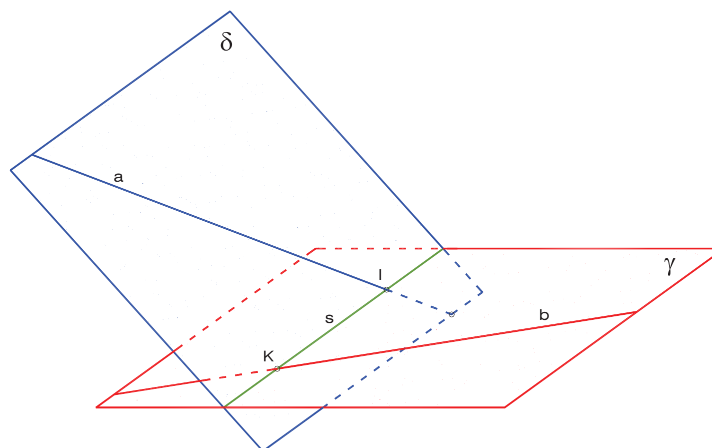


Fig. 3.38: Recta que pasa por el punto K y corta a las rectas "a" y "b".

3. Construir una recta contenida en un plano δ que forme un ángulo α con el plano horizontal de proyección (Fig. 3.39).

Como se ha indicado, el lugar geométrico de las rectas que pasan por un punto K del espacio y forman un determinado ángulo con el plano horizontal de proyección, son las generatrices de un cono recto de revolución cuyo vértice es el punto K.

Para encontrar la solución a este problema es necesario, en primer lugar, escoger un punto cualquiera K perteneciente al plano δ, para luego construir un cono recto con la base apoyada sobre PH y cuyo eje es una recta de pié KO; la proyección vertical estará conformada por dos rectas que pasan por K^v y forman α grados con la línea de tierra. Tales rectas definen un triángulo isósceles $K^v1^v2^v$, siendo el tamaño 1^vO^v el radio del cono.

A continuación, con centro en O^h y abertura igual al radio, se traza un arco que cortará en dos puntos 3 y 4 a la traza horizontal del plano δ. Estos puntos, cuya cota es igual a cero, definen junto a K, dos rectas "a" y "b" que cumplen con la condición exigida en el enunciado del problema.

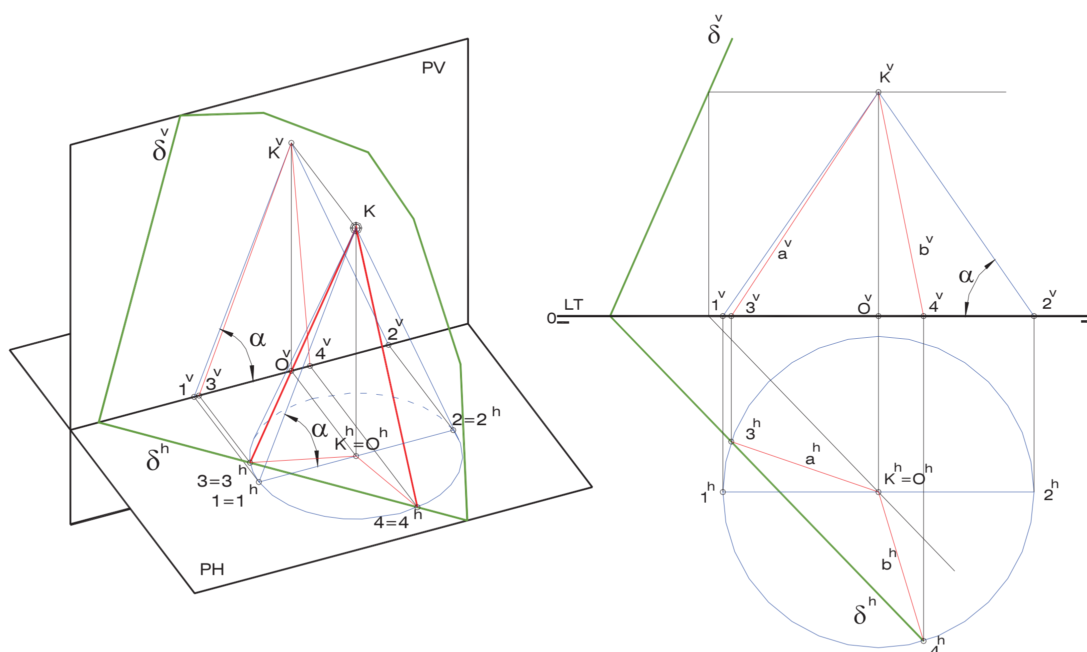


Fig. 3.39: Rectas contenidas en un plano y forman un ángulo α con PH.

De lo anterior se infiere que el problema puede tener dos, una o ninguna solución, dependiendo de la relación entre el ángulo que el plano δ forma con el plano horizontal y el ángulo α dado. Así, si el ángulo del plano es menor que α, el problema no tiene solución, si son iguales, existe una única solución, pues el arco será tangente a la traza horizontal de δ, y por último, si el ángulo de este plano es mayor que el ángulo dado, existen dos posibles soluciones, como lo muestra la Fig. 3.39.

De manera análoga, es posible encontrar la dirección de las rectas contenidas en el plano δ que forman un determinado ángulo β con el plano vertical de proyección.

4. Construir un plano δ que contenga a una recta “m” y forme α grados con el plano horizontal de proyección (Fig. 3.40).

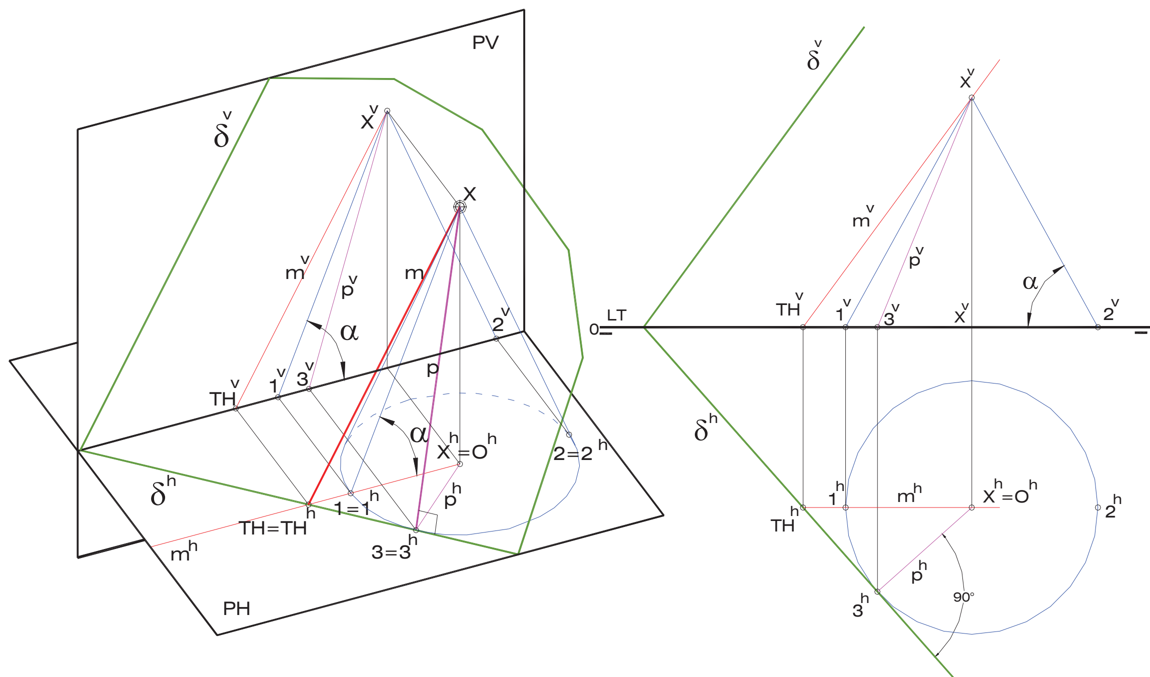


Fig. 3.40: Plano que contiene a una recta "m"
y forma un ángulo α con PH.

Para resolver este problema es necesario construir un cono de revolución con la base apoyada sobre PH y el vértice en un punto cualquiera X de la recta “m”. Al igual que en el ejemplo anterior, la proyección vertical del cono es un triángulo isósceles cuyos ángulos iguales son iguales al ángulo α dado, y en el que la base es igual al diámetro. El ángulo formado entre el plano pedido δ y el plano horizontal, es igual al que forman con éste ultimo las rectas de máxima pendiente de δ. Las posibles soluciones para esas rectas de máxima pendiente son las generatrices del cono construido que pertenecen al mismo tiempo al plano δ.

Por otra parte, la traza horizontal del plano δ debe pasar por el punto de traza horizontal TH de la recta “m” y ser tangente a la base del cono, puesto que la mencionada traza del plano debe ser perpendicular a sus rectas de máxima pendiente.

De esa forma, se obtienen dos soluciones para la traza horizontal del plano δ si el punto de traza horizontal TH de la recta “m” es interior a la circunferencia de base del cono; una solución si pertenece a ella, y, por último, ninguna solución si ese punto TH es interior a dicha circunferencia. En el ejemplo mostrado en la Fig. 3.40 se ha representado una sola de las dos soluciones resultantes, correspondiente a la recta de máxima pendiente “p” definida por los puntos X y 3.

Finalmente, la traza vertical del plano δ queda definida por el punto de corte entre la traza horizontal y la línea de tierra y el punto de traza vertical TV de la recta “m”, el cual es un punto impropio en el ejemplo por ser “m” una recta frontal, lo que implica que la traza vertical del plano es paralela a la proyección vertical de esta recta.

Análogamente, es posible obtener el plano δ si se ofrece como dato una recta perteneciente a él y el ángulo β que forma con el plano vertical de proyección.

5. Hallar un punto P equidistante de los puntos A Y B y contenido en una recta "s" (Fig. 3.41)

El lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de los puntos A y B es el plano mediador μ del segmento AB. Por otra parte, como el punto P debe pertenecer a la recta "s", se encontrará en la intersección entre esta recta y el plano μ.

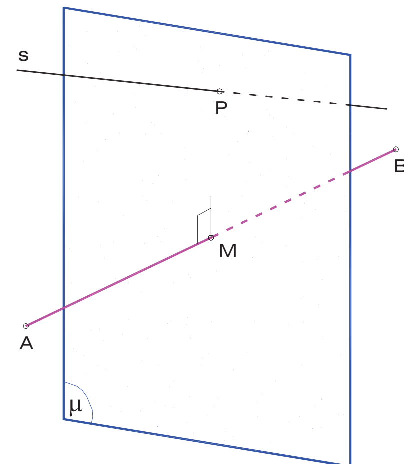


Fig. 3.41: Punto equidistante de dos puntos A y B y contenido en una recta "r".

6. Hallar la recta perpendicular común "p" a dos rectas "a" y "b" que se cruzan (Fig. 3.42)

Sean dos rectas "a" y "b" no coplanares (cruzadas sin punto común); existe una única recta "p" que es perpendicular a ambas rectas "a" y "b" y que las corta en los puntos Q y R, respectivamente.

Para encontrar la recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan existen varios métodos; tres de ellos se exponen en este trabajo: dos basados en relaciones geométricas y un tercero en el que se aplica la introducción de dos nuevos planos de proyección de forma conveniente.

El primer procedimiento (Fig. 3.42-a) consta de los siguientes pasos:

- Construir un plano δ que sea paralelo a una de las rectas, "a" por ejemplo, y contenga a la otra. Para ello se traza una recta "c" paralela a "a" por un punto X cualquiera de la recta "b". Cualquier recta perpendicular al plano así obtenido es perpendicular tanto a la recta "a" como a la recta "b".
- Escoger un punto cualquiera Y sobre la recta "a" y construir por ese punto una recta "m", perpendicular al plano δ.
- Determinar el punto de intersección I entre la recta "m" y el plano δ.
- Trazar por el punto I una recta "d" que sea paralela a la recta "a"; dicha recta "d" corta a la recta "b" en el punto R.
- Construir la recta "p" buscada, la cual pasa por el punto R, es paralela a la recta "m" y corta a la recta "a" en el punto Q.

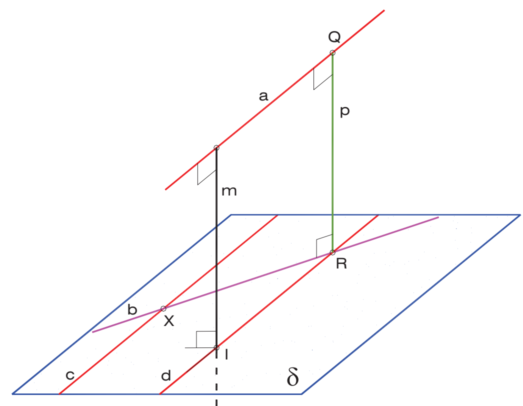


Fig. 3.42-a: Perpendicular Común. Primer Método.

El segundo método (Fig. 3.42-b) consiste en lo siguiente:

- Escoger un punto X cualquiera sobre una de las rectas, "a" por ejemplo, y construir un plano π perpendicular a ella que pase por ese punto.
- Escoger un punto cualquiera Y sobre la otra recta, es decir "b", y construir un plano ρ que sea perpendicular a ella y contenga al punto Y.
- Determinar la recta de intersección "i" entre los planos π y ρ. Esta recta posee la dirección de la recta perpendicular común a "a" y "b", ya que cualquier recta contenida en el plano π es perpendicular a la recta "a", en tanto que todas las rectas del plano ρ son perpendiculares a la recta "b"
- Construir un plano δ que contenga a la recta "a" (o a la recta "b") y sea paralelo a la recta "i". En el plano así determinado se encuentra la recta perpendicular común.
- Hallar el punto de intersección (R en la figura) entre la recta "b" y el plano δ.
- Trazar por ese punto de intersección una recta "p" paralela a la recta "i", la cual constituye la recta perpendicular común buscada, que cortará a la recta "a" en el punto Q.

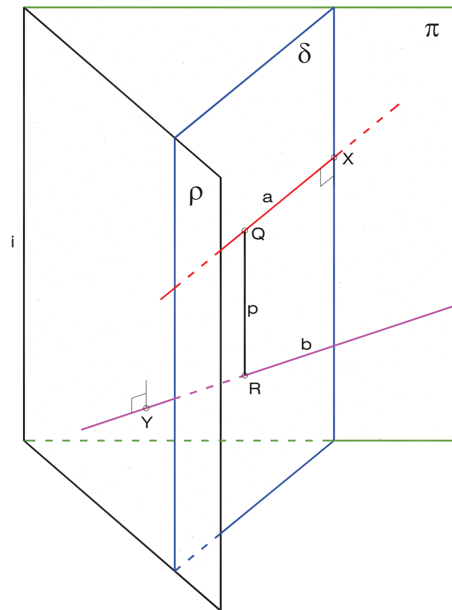


Fig. 3.42-b: Perpendicular Común.
Segundo Método.

También es posible determinar la recta perpendicular común a las rectas "a" y "b" mediante la generación de nuevos sistemas de proyección, de acuerdo con el siguiente procedimiento (Fig. 42-c):

- Generar un sistema de proyección LT2 compuesto por una de los planos de proyección del sistema LT1 y un nuevo plano paralelo a una de las dos rectas. En el ejemplo mostrado se ha introducido un nuevo plano horizontal, siendo la línea de tierra LT2 paralela a la proyección vertical de la recta "a", con lo que se obtiene a la recta "a" en posición horizontal en sistema LT2.
- Generar un tercer sistema LT3, compuesto por el nuevo plano horizontal introducido en el paso anterior y un nuevo plano vertical; éste último debe ser perpendicular a la recta "a". En este tercer sistema la recta "a" está en posición de punta.

- Trazar por a^3 una perpendicular a b^3, que constituye la proyección de la perpendicular común "p" sobre el segundo plano auxiliar. El corte R^3 entre p^3 y b^3 es la segunda proyección auxiliar del punto común a las rectas "b" y "p".
- Construir por R^3 una referencia perpendicular a LT3, que cortará a b^2 en R^2.
- Trazar por R^2 una perpendicular p^2 a la primera proyección auxiliar de la recta "a"; el corte entre ambas líneas es Q^2, primera proyección auxiliar del punto común a las rectas "a" y "p".
- Alinear mediante perpendiculares a LT2 para obtener las proyecciones Q^v y R^v sobre a^v y b^v, respectivamente.
- Alinear mediante perpendiculares a LT1 para obtener las proyecciones Q^h y R^h sobre a^h y b^h, respectivamente.

Es necesario señalar que, si bien la distancia entre los puntos Q y R es la menor distancia entre las rectas "a" y "b", en ninguna de las cuatro proyecciones aparece el segmento QR en verdadero tamaño, ya que para hallar estos puntos de corte se han generado nuevos sistemas cuyos planos de proyección no son paralelos a dicho segmento.

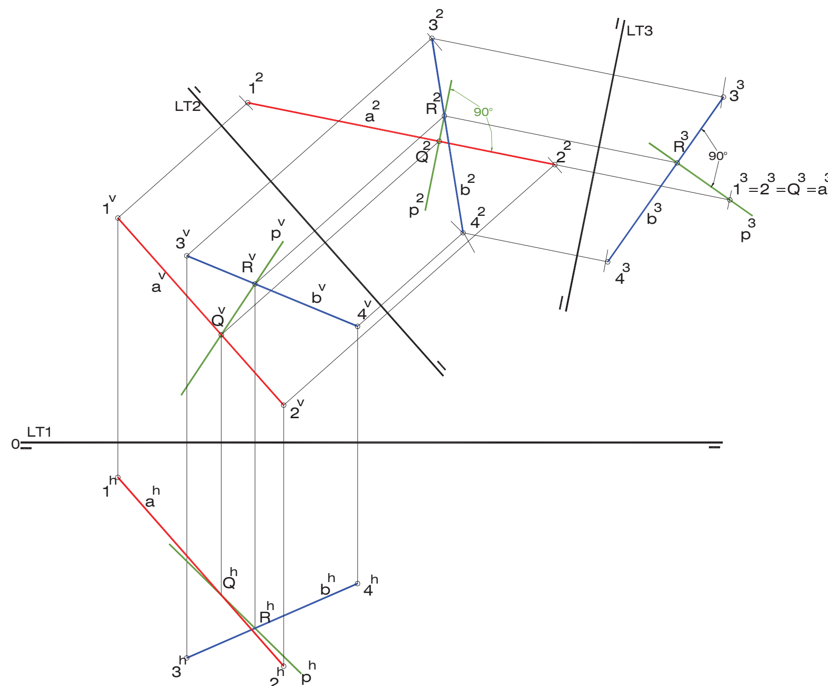


Fig. 3.42-c: Perpendicular Común.
Tercer Método.

CAPÍTULO IV

4.1 Concepto y clasificación de sólidos geométricos

Un sólido geométrico es una región del espacio limitada por ciertas superficies que pueden ser planas o curvas. Dependiendo de las características que presentan esas superficies, es posible realizar una clasificación como la que se muestra en la Tabla #1.

TABLA # 1: Clasificación de los Sólidos Geométricos de acuerdo a la superficie que los define.

<table>
<tr><td rowspan="10">POLIEDROS</td><td rowspan="9">IRREGULARES</td><td rowspan="4">PRISMAS</td><td rowspan="2">RECTOS</td><td>DE BASE REGULAR</td></tr>
<tr><td>DE BASE IRREGULAR</td></tr>
<tr><td rowspan="2">OBLICUOS</td><td>DE BASE REGULAR</td></tr>
<tr><td>DE BASE IRREGULAR</td></tr>
<tr><td rowspan="4">PIRÁMIDES</td><td rowspan="2">RECTAS</td><td>DE BASE REGULAR</td></tr>
<tr><td>DE BASE IRREGULAR</td></tr>
<tr><td rowspan="2">OBLICUAS</td><td>DE BASE REGULAR</td></tr>
<tr><td>DE BASE IRREGULAR</td></tr>
<tr><td colspan="3">COMBIBNACIONES Y PARTES DE OTROS POOLIEDROS</td></tr>
<tr><td>REGULARES O PLATÓNICOS</td><td colspan="3">Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">CUERPOS REDONDOS</td><td rowspan="3">REGLADOS O DE SIMPLE CURVATURA</td><td rowspan="2" colspan="2">DESARROLLABLES</td><td>CONOS</td></tr>
<tr><td>CILINDROS</td></tr>
<tr><td colspan="2">ALABEADOS</td><td>Conoide, Cilindroide, Hiperboloide de una hoja, etc.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DE DOBLE CURVATURA</td><td colspan="2">DE REVOLUCIÓN</td><td>Esfera, Toro, Elipsoide de Revolución, etc.</td></tr>
<tr><td colspan="3">NO DE REVOLUCIÓN</td></tr>
<tr><td>SÓLIDOS COMPUESTOS</td><td colspan="4">RESULTADO DE LA COMBINACIÓN DE SÓLIDOS DE DISTINTA NATURALEZA.</td></tr>
</table>

La determinación de los distintos elementos que componen un sólido geométrico y el trazado de su proyección constituyen la síntesis de todos los temas estudiados previamente en este libro. Es entonces obligatorio el buen dominio de los conocimientos teóricos y de los procedimientos instrumentales preliminares, para lograr el correcto empleo de las herramientas con las que se cuenta para obtener buenos resultados en la resolución de los problemas que han de ser abordados.

Los *Poliedros s*on cuerpos cuya superficie limitante está compuesta exclusivamente por planos (*superficie poliédrica)*, los cuales conforman un número determinado de *caras.* A su vez, los segmentos de recta generados por la intersección de caras adyacentes constituyen las *aristas* del poliedro. Estas aristas convergen en un número no inferior a 3 en puntos denominados *vértices* del poliedro.

4.2 Proyección cilíndrica ortogonal de un Poliedro

La proyección de cualquier poliedro sobre un plano siempre es un polígono, cuyos vértices son el resultado de la intersección entre los rayos proyectantes tangentes al sólido que pasan por sus vértices y el plano de proyección considerado. Dicho polígono constituye, a su vez, la proyección de la *Línea de Contorno Aparente* del poliedro en el plano de proyección; esta línea poligonal cerrada puede no ser plana sino alabeada, es visible en la proyección y es la frontera entre las caras visibles y las no visibles del sólido.

Cualquier vértice de un poliedro se proyecta dentro de la proyección de la línea de contorno aparente correspondiente. Por otra parte, esta línea no es la misma en la proyección horizontal y en la vertical, por lo que la visibilidad debe ser analizada separadamente.

En la Fig. 4.1 se muestra la proyección de un cubo ABCDEFGH sobre el plano horizontal. La proyección del poliedro es el polígono $A^hB^hC^hG^hH^hE^h$, proyección horizontal de la poligonal alabeada ABCGHE, que es la línea de contorno aparente en la proyección horizontal considerada.

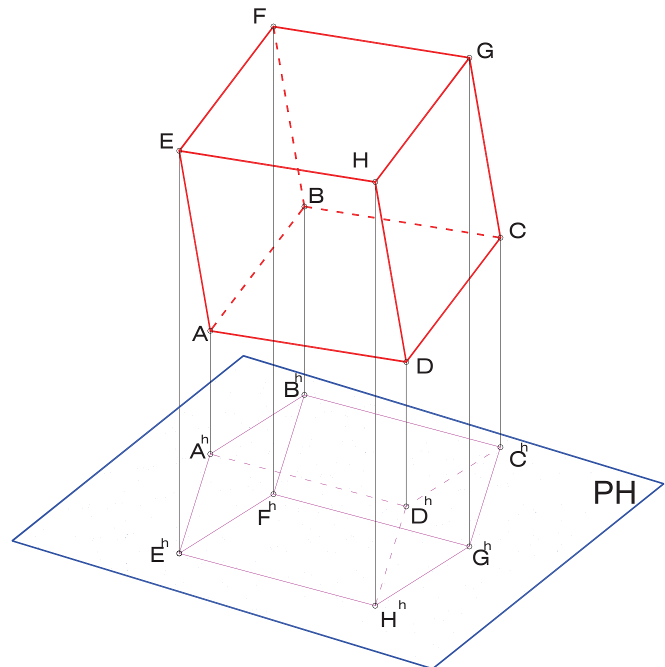


Fig. 4.1-a: Proyección Cilíndrica Ortogonal de un Poliedro.

4.2.1 Determinación de aristas visibles y ocultas en una proyección

Como puede observarse en la misma figura 4.1, las caras EFGH, ABFE y BCGF se encuentran por encima de la línea de contorno aparente, por lo que las aristas comunes a esas caras se representan con línea continua en la proyección. Por el contrario, las caras restantes se hallan por debajo de la mencionada línea, lo que justifica el trazado de las proyecciones de las aristas AD, CD y DH con línea de trazos, pues son aristas invisibles en la proyección.

En forma general, es posible enunciar un criterio que permita la determinación de las aristas visibles y ocultas en las proyecciones diédricas, criterio éste que es válido para cualquier tipo de poliedro y que a continuación se expone:

Las aristas convergentes en el vértice de menor cota del poliedro serán invisibles en la proyección horizontal, a menos que formen parte de la línea de contorno aparente del sólido en dicha proyección.

De manera análoga, las aristas convergentes en el vértice de menor vuelo del poliedro son no visibles en la proyección vertical, a excepción de aquellas que, cumpliendo con lo anterior, forman parte de la línea de contorno aparente del sólido en la mencionada proyección.

4.3 Prismas

Los poliedros irregulares presentan caras y aristas de diferentes tamaños. Pueden ser clasificados en *prismas* y *pirámides*, en función de la superficie poliédrica que los limita.

El *Prisma*, es un poliedro limitado por una *superficie prismática*, la cual se compone de planos cuyas intersecciones entre sí son paralelas. Cada una de esas intersecciones es la recta común a dos planos como máximo.

La superficie prismática es aquella engendrada por una recta denominada *generatriz*, la cual, apoyándose en un polígono de n lados (directriz), se mueve de tal manera que se mantiene paralela a otra recta llamada *eje de la superficie* (Fig. 4.2-a).

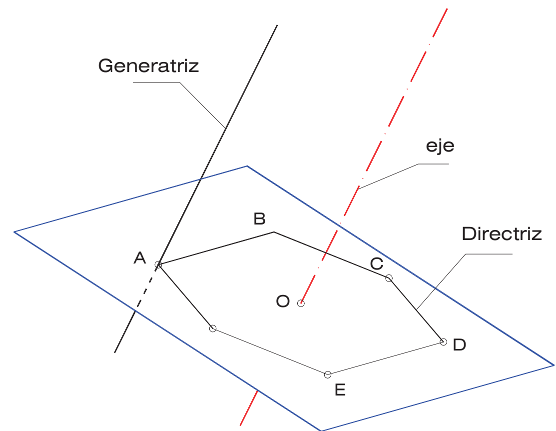


Fig. 4.2-a: Generación de la superficie prismática.

A fin de limitar el espacio dentro de la superficie prismática, ésta es cortada por dos planos paralelos δ y δ_1, dando lugar a dos polígonos iguales llamados *bases* – ABCDE y $A_1B_1C_1D_1E_1$ en la Fig. 4.2-b - los cuales pueden ser regulares o no. Las demás caras del prisma son denominadas *caras laterales,* que son las caras de la superficie prismática, cuyo número es igual al número de vértices que tienen los polígonos que conforman las bases y constituyen, en cualquier caso, paralelogramos.

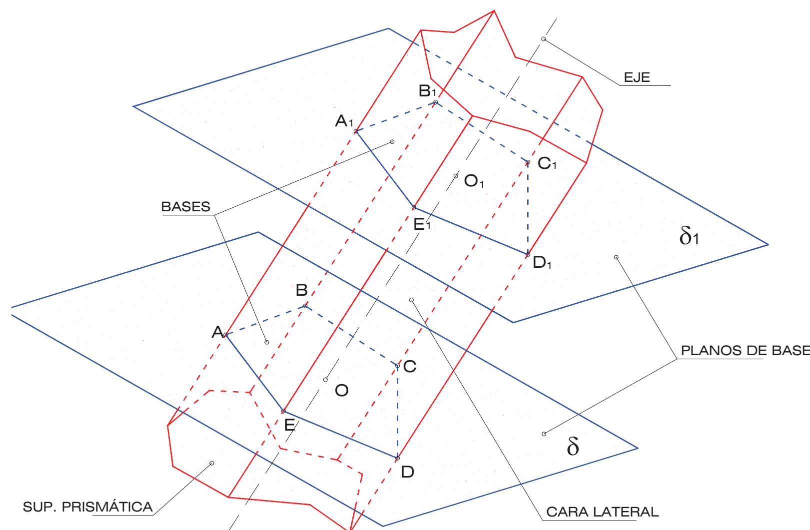


Fig. 4.2-b: Prisma

Asimismo, las aristas resultantes de la intersección entre las caras laterales del sólido reciben el nombre de *aristas laterales*, siendo *aristas básicas* las resultantes de la intersección entre la superficie prismática y los planos que contienen a las bases, es decir, los lados de los polígonos base.

La recta que pasa por los centros O y O_1 de cada una de las dos bases del prisma se denomina *eje del sólido,* y es paralela a sus aristas laterales. Si este eje - y por consiguiente las aristas laterales – es perpendicular a los planos de base, el prisma será *recto;* si es oblicuo a dichos planos, el sólido se denomina *oblicuo.* La menor distancia entre los planos de base se conoce como *Altura del prisma (H),* y resulta ser igual al segmento O O_1 si se trata de prismas rectos.

Los siguientes tópicos referentes a prismas se enfocan exclusivamente en aquellos cuya base es un polígono regular y en los que el eje es perpendicular a los planos base, es decir, prismas rectos de base regular.

4.3.1 Secciones Notables de Prismas Rectos de Base Regular

Las secciones más importantes desde el punto de vista geométrico en cualquier prisma recto de base regular son las *Secciones Sencillas* y las *Secciones Principales* (Fig. 4.4).

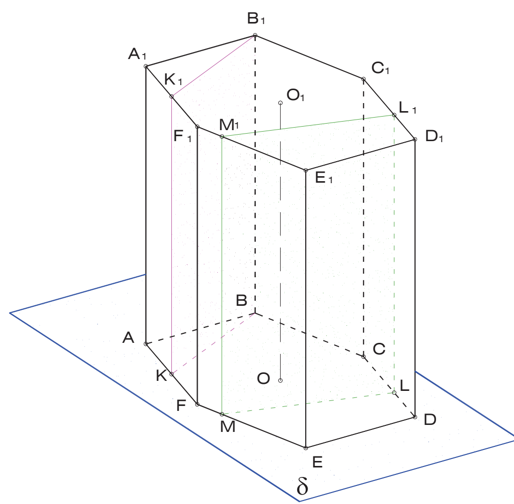


Fig. 4.3

Las Secciones Sencillas de un prisma son el resultado de la intersección entre planos paralelos al eje del sólido y el propio sólido. Su forma es de paralelogramos con dos lados opuestos de longitud igual a la del segmento del eje OO_1. Las secciones sencillas serán rectangulares si el sólido es recto (Fig. 4.3).

Las Secciones Principales de un prisma contienen las dimensiones más relevantes del poliedro: la altura y la diagonal de base o altura de base, dependiendo del número de vértices que ésta tenga. Resultan al seccionar este poliedro mediante planos que poseen las siguientes características:

1. Contienen al eje del sólido.
2. Contienen a uno de los vértices básicos.

De lo anterior se infiere que las secciones principales son paralelogramos – rectángulos si el prisma es recto – con dos lados opuestos de longitud igual a la del segmento OO_1, en tanto que los otros dos lados tienen una longitud igual a la diagonal de base, para el caso de prismas con un número de vértices básicos par (Fig. 4.4-a), o a la altura de base, si se trata de prismas con un número de vértices básicos impar (Fig. 4.4-b).

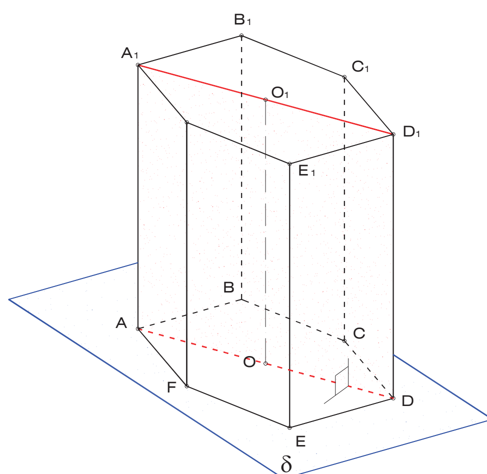


Fig. 4.4-a

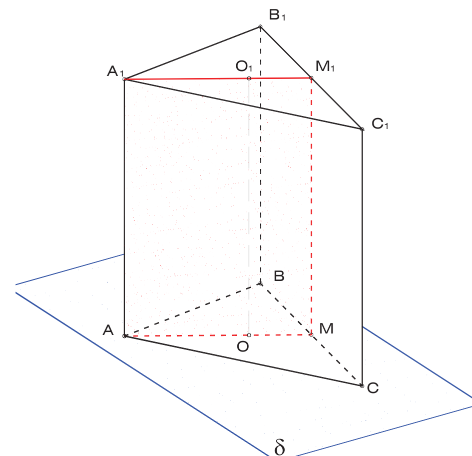


Fig. 4.4-b

El número de secciones sencillas en un prisma es indeterminado; por el contrario, el número de secciones principales es igual al número de vértices básicos que posee el poliedro. Es evidente que, si el prisma considerado es un prisma recto, cada uno de los planos de sección sencilla y de sección principal es perpendicular a los planos de base.

4.3.2 Proyección cilíndrica ortogonal de un Prisma Recto de Base Regular.

Las características de la proyección de la línea de contorno aparente de un prisma recto de base regular sobre un determinado plano de proyección, dependen de la posición relativa entre este plano y el eje del poliedro. Así, si el eje es paralelo al plano de proyección, el prisma se proyecta como un rectángulo de altura igual a la altura del prisma (Fig. 4.5-a); si el eje es perpendicular al plano de proyección, el prisma se proyecta como un polígono igual a la base (Fig. 4.5-b); finalmente, si el eje es oblicuo al plano de proyección, el resultado es un polígono generalmente irregular con un número de lados mayor a cuatro[6] (Fig. 4.5-c).

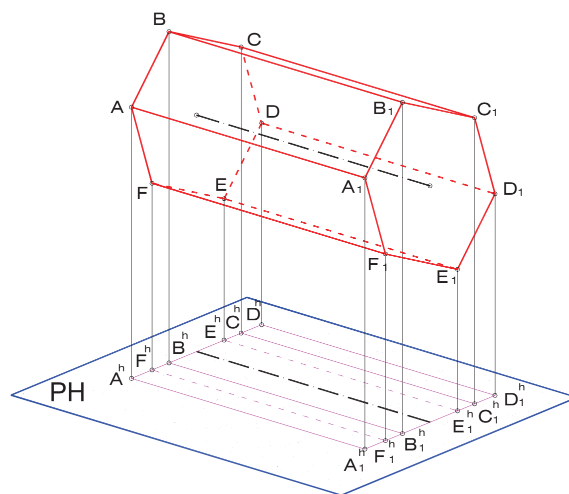


Fig. 4.5-a

Si en el primer caso el rectángulo corresponde a una sección principal, la posición del prisma en relación con el plano de proyección se considera una *posición notable*, ya que la sección principal es un polígono que contiene dos dimensiones fundamentales del prisma: la altura y una diagonal de cara o una altura de cara, dependiendo del número de vértices básicos que posee.

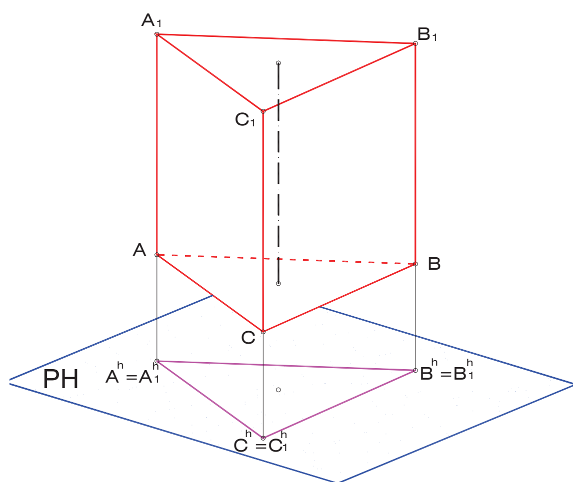


Fig. 4.5-b

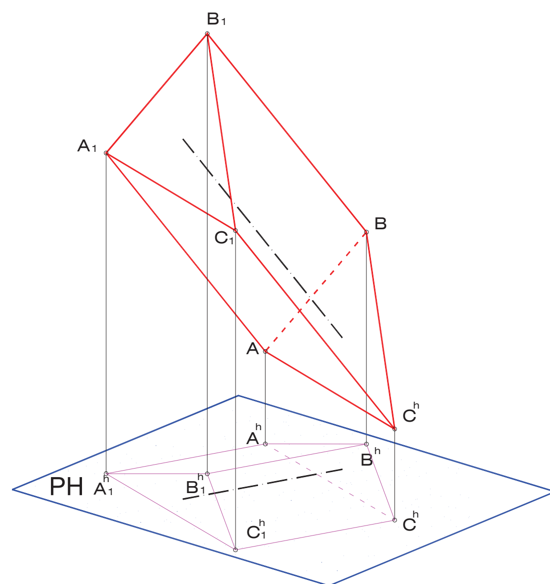


Fig. 4.5-c

Asimismo, el segundo caso constituye otra posición notable del prisma con respecto al plano de proyección, dado que la proyección correspondiente representa el verdadero tamaño de las bases del poliedro.

[6] Aquí se considera únicamente el plano horizontal de proyección, pero es obvio que estas características son válidas con referencia a PV.

Como regla general puede establecerse que *si se conoce la sección principal de un prisma, o una de las bases y la magnitud de la altura del poliedro, éste queda completamente determinado.*

Considérese el siguiente ejemplo (Fig. 4.6): se quiere construir las proyecciones diédricas de un prisma recto de base regular hexagonal ABCDEF, conocidos los vértices A y D_1 y el punto P, éste último sobre el plano que contiene a la sección principal ADD_1A_1, y sabiendo que las aristas básicas tienen una longitud "a". Se tomará la solución de menor cota para el vértice D.

Los puntos conocidos en un principio permiten definir el plano de una de las secciones principales. Su construcción será la clave para la resolución de este problema.

El primer paso consiste en hallar una proyección en la que el plano π, definido por los puntos A, D_1 y P y que contiene a la sección principal ADD_1A_1. aparezca en verdadero tamaño. Esto se ha realizado aplicando un abatimiento en torno a la traza horizontal π^h. A continuación, se ha construido un hexágono auxiliar de lado igual a la longitud "a" de las aristas básicas del prisma, obteniéndose así la longitud "d" de la diagonal de base (Fig. 4.6-a). Luego se construye una semicircunferencia de diámetro igual a la longitud $A^RD_1^R$, sobre la cual se encuentra D^R por ser el arco capaz de noventa grados. Existen dos soluciones para ese arco; se ha tomado la de menor cota.

Haciendo centro en A^R y con radio igual a la diagonal de base "d", se traza un arco que corta al anterior en D^R, luego, aplicando paralelismo entre rectas, se determina el punto A_1R (Fig. 4.6-a).

Seguidamente, se hallan las proyecciones diédricas de los vértices D y A_1, para luego construir el plano de base inferior δ, el cual es perpendicular a las aristas laterales AA_1 y DD_1 y contiene a los puntos A y D. Mediante un

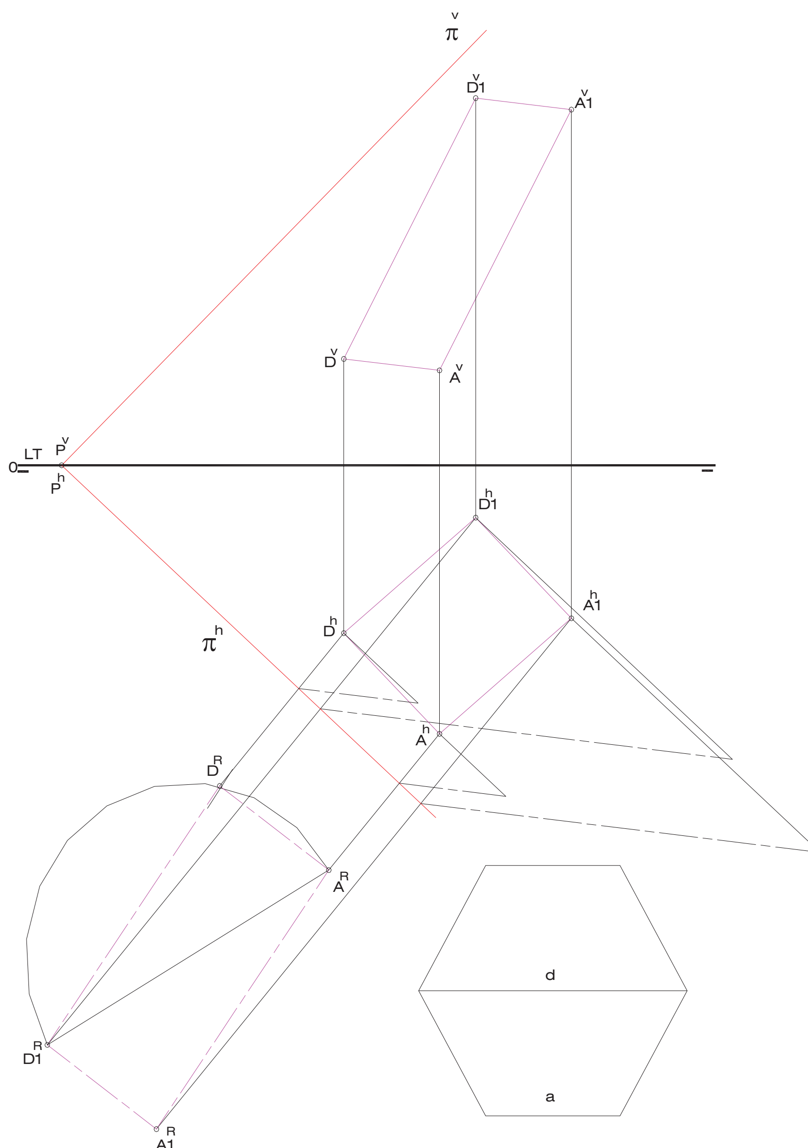


Fig. 4.6-a

abatimiento de los puntos A y D del plano δ en torno a su traza horizontal, se ha logrado construir el verdadero tamaño de la base inferior $A^rB^rC^rD^rE^rF^r$, a partir del cual se obtienen las proyecciones diédricas de dicha base.

En vista de que se trata de un prisma recto de base hexagonal regular, existe paralelismo entre las aristas laterales y entre las aristas básicas opuestas, por lo que se ha aprovechado esa relación en la construcción de la cara superior $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (Fig. 4.6-b).

Finalmente, es necesario analizar las partes visibles y las no visibles en cada una de las dos proyecciones diédricas. Siendo B el vértice de menor cota, es un punto invisible en la proyección horizontal, por tanto, la aristas convergentes en ese vértice son invisibles en dicha proyección, a menos que sean parte de la línea de contorno aparente.

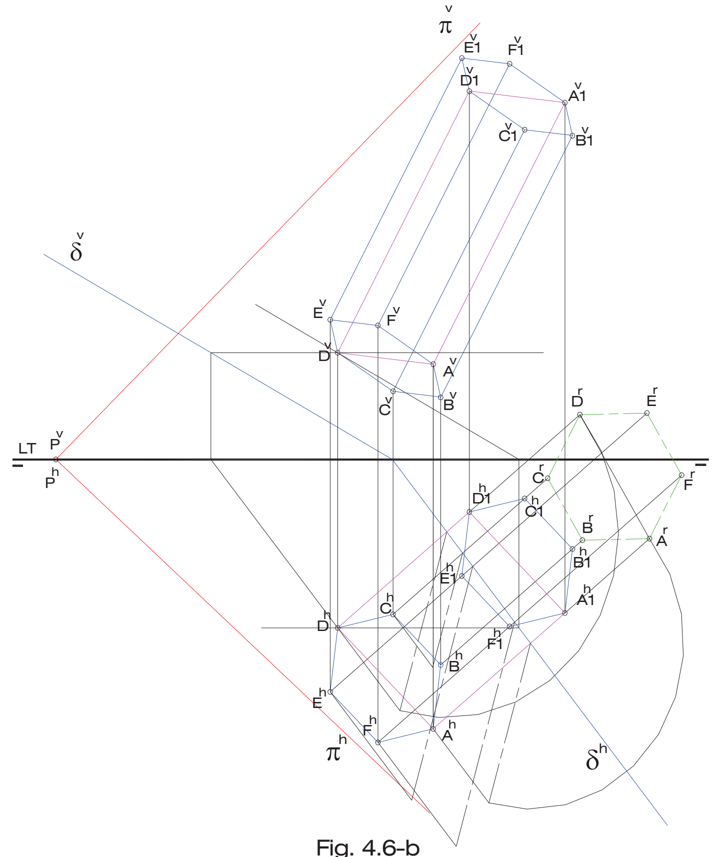


Fig. 4.6-b

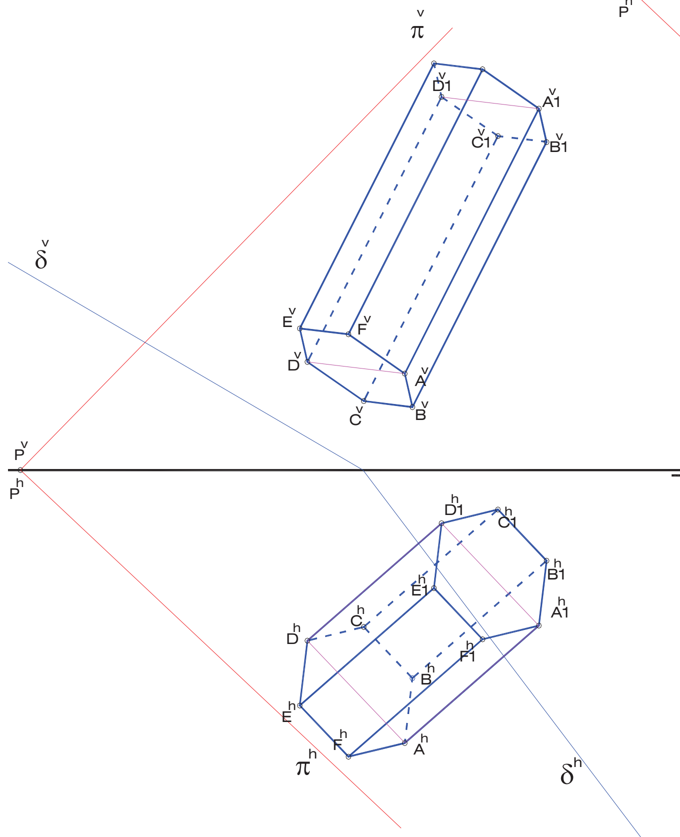


Fig. 4.6-c

De igual manera, se determinan las aristas no visibles en proyección vertical; siendo C1 el vértice de menor vuelo, las aristas convergentes en este vértice serán invisibles, a menos que formen parte de la línea de contorno aparente (Fig. 4.6-c).

Lo anterior no es más que la aplicación del criterio de visibilidad para las aristas de un poliedro en proyecciones diédricas, el cual ya ha sido expuesto en el apartado 4.2.1. En adelante se hará una simple referencia al mencionado criterio cada vez que se amerite determinar las aristas visibles y ocultas en los ejemplos de construcción de poliedros.

4.4 Pirámides

Una *Pirámide* es un poliedro limitado por una *superficie piramidal*, la cual se compone de planos cuyas intersecciones tienen un punto común o *vértice* de la superficie piramidal.

La superficie piramidal es aquella engendrada por una recta denominada *generatriz*, la cual, manteniendo un punto fijo llamado vértice, recorre un polígono o directriz. La recta que pasa por el vértice y por el centro de este polígono es el *eje de la superficie.* (Fig. 4.2-a).

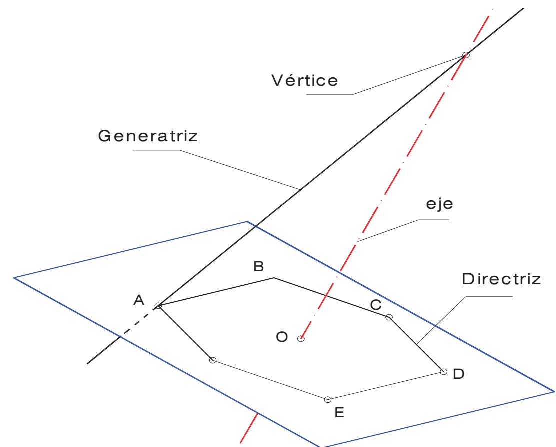


Fig. 4.7-a: Generación de la superficie piramidal.

Con el objetivo de limitar el espacio dentro de la superficie piramidal, se considera solamente una de las porciones separadas por el vértice y es cortada además por un plano δ, dando lugar a un polígono llamado *base* – ABCDE en la Fig. 4.7 – el cual puede ser regular o no. Las demás caras de la pirámide son denominadas *caras laterales,* que son las caras de la superficie piramidal cuyo número es igual al número de vértices que tienen el polígono de base y tienen forma, en cualquier caso, de triángulos.

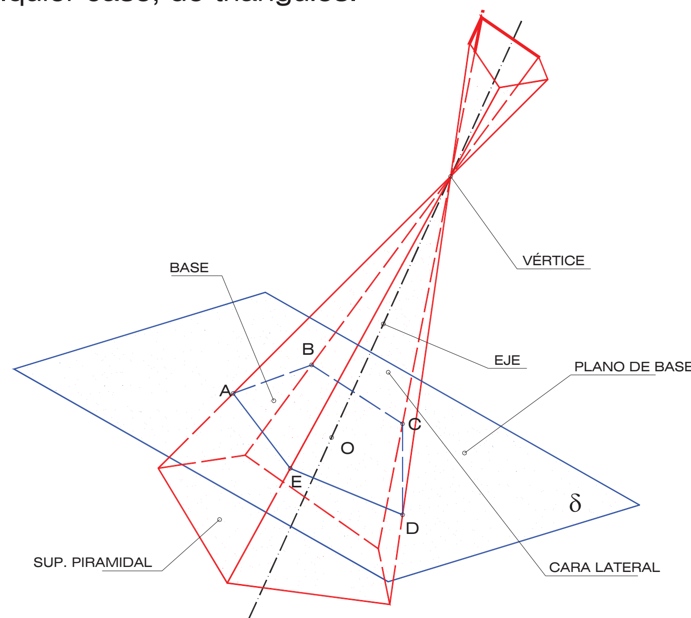


Fig. 4.7-b: Pirámide

Asimismo, las aristas resultantes de la intersección entre las caras laterales del sólido reciben el nombre de *aristas laterales*, siendo *aristas básicas* las resultantes de la intersección entre la superficie piramidal y el plano δ, es decir, los lados del polígono base.

La recta que pasa por el centro O de la base y por el vértice V de la pirámide, recibe el nombre de *eje del* sólido. Si este es perpendicular al plano de base δ, la pirámide será *recta;* si es oblicuo a dicho plano, el sólido se denomina *oblicuo.*

La menor distancia entre el vértice del sólido y el plano de base se conoce como *Altura de la pirámide (H),* y resulta ser igual al segmento VO en el caso de pirámides rectas.

De igual manera que en el aparte correspondiente al prisma, los siguientes puntos se refieren exclusivamente a pirámides rectas de base regular.

4.4.1 Secciones Notables de Pirámides Rectas de Base Regular

Las secciones más importantes desde el punto de vista geométrico en cualquier pirámide recta de base regular son las *Secciones Sencillas* (Fig. 4.8) y las *Secciones Principales* (Fig. 4.9).

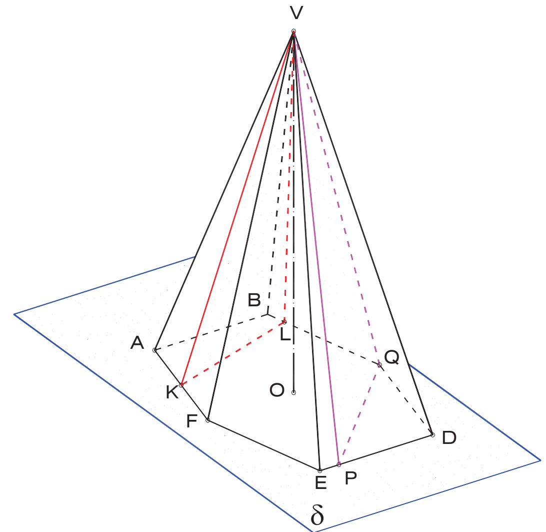


Fig. 4.8

Las Secciones Sencillas de una pirámide son el resultado de la intersección entre planos que contienen al vértice del sólido y el propio sólido. Su forma es triangular.

Si la sección es generada por un plano que contiene al eje de la pirámide y a uno de los vértices de base, recibe el nombre de *Sección Principal*. Su forma y dimensiones dependen del numero de vértices que posea el poliedro en su base. Así, si ese número es par (Fig. 4.9-a) la sección es un triángulo isósceles cuyos lados iguales son dos aristas laterales opuestas, en tanto que el lado desigual corresponde a una diagonal del polígono de base. De lo contrario, la sección principal es un triángulo escaleno (Fig. 4.9-b) cuyos lados son una arista lateral, una altura de cara lateral y una altura del polígono de base.

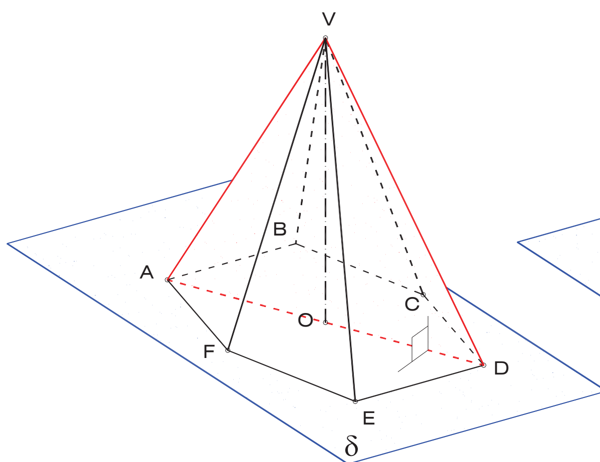


Fig. 4.9-a

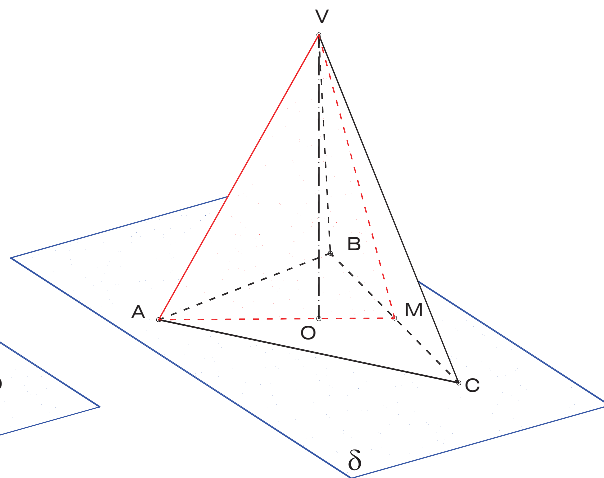


Fig. 4.9-b

El número de secciones sencillas en una pirámide es infinito; en cambio, el número de secciones principales es igual al número de vértices básicos que posee el poliedro. Es obvio que, si la pirámide considerada es recta, cada uno de los planos de sección principal es perpendicular al plano de base.

4.4.2 Proyección cilíndrica ortogonal de una Pirámide Recta de Base Regular.

El contorno de la proyección cilíndrica ortogonal de una pirámide recta de base regular es un polígono, cuyas características varían dependiendo de la relación existente entre el eje del poliedro y el plano de proyección (el horizontal, por ejemplo). De lo anterior se derivan tres posiciones bien diferenciadas, a saber: eje paralelo al plano de proyección, eje perpendicular al plano de proyección y eje oblicuo al plano de proyección.

En el primer caso, el contorno de la proyección de la pirámide sobre el plano considerado es un triángulo (Fig. 4.10-a) uno de cuyos lados corresponde a la proyección del polígono base del poliedro, ya que éste se apoya en un plano que es perpendicular (proyectante) en relación al plano de proyección. Si una de las secciones principales del poliedro es además paralela a este plano, la posición se considera notable y la línea de contorno aparente coincide con dicha sección principal.

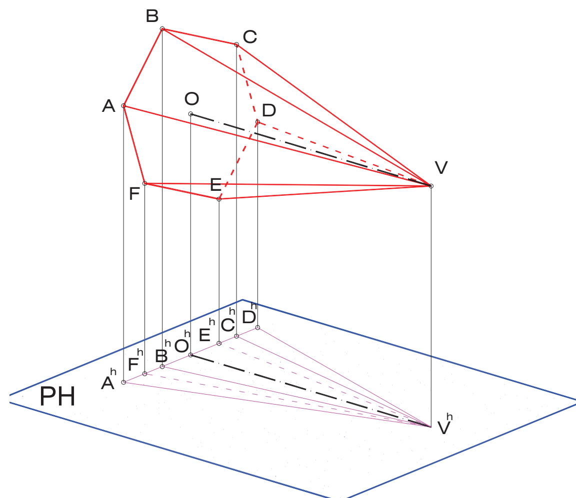


Fig. 4.10-a

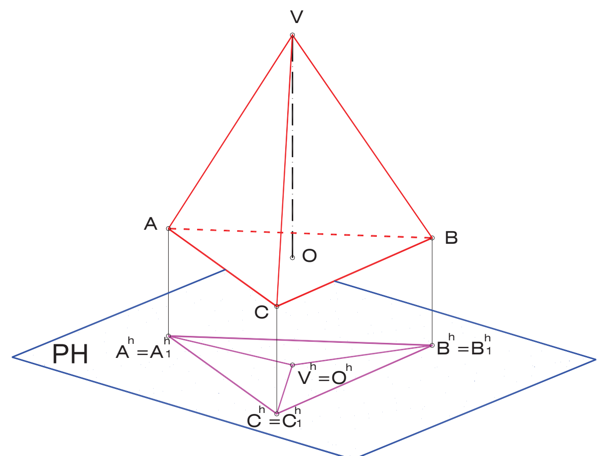


Fig. 4.10-b

En el segundo caso (Fig. 4.10-b) la línea de contorno aparente de la pirámide se reduce al polígono de base, el cual se proyecta con su verdadero tamaño; esta posición se considera notable.

Por último, si el eje del poliedro es oblicuo con respecto al plano de proyección considerado, el contorno de la proyección es un polígono generalmente irregular (Fig. 4.10-c).

Al igual que con el prisma, se puede decir que *si se conoce la sección principal de una pirámide, o una de las bases y la magnitud de la altura del poliedro, éste queda completamente determinado.*

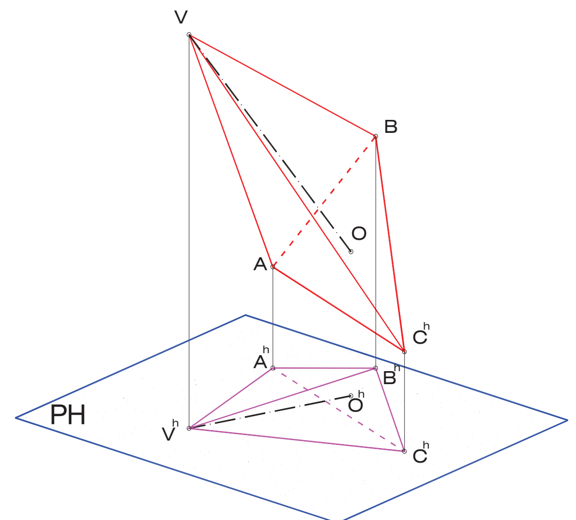


Fig. 4.10-c

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra el proceso de construcción de la doble proyección ortogonal de una pirámide recta de base

cuadrada ABCD, partiendo de los siguientes datos: V, vértice del poliedro, 1 y 2, dos puntos sobre las aristas opuestas VA y VC, y la longitud de las aristas laterales “l”. Una de las formas de resolver este problema comienza por la determinación del verdadero tamaño de los segmentos V1 y V2 aplicando uno de los métodos estudiados, abatimiento en el ejemplo. Posteriormente, se consigna sobre los verdaderos tamaños así encontrados la longitud “l” de las aristas laterales, para luego determinar las proyecciones de los puntos A, sobre la recta definida por V1, y B, sobre la recta definida por V2. El punto medio del segmento AC – diagonal de base – es el centro O del polígono base de la pirámide (Fig. 4.11-a).

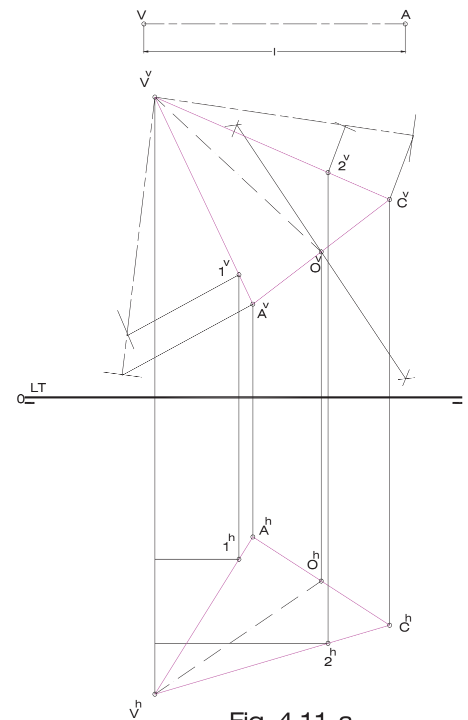


Fig. 4.11-a

Una vez conocido el centro O de la base y el eje del poliedro, se procede a construir por dicho punto O (o por cualquiera de los vértices A y C) un plano δ perpendicular a la dirección VO, el cual contiene al polígono base de la pirámide. (véase Perpendicularidad, Pág. 54). Luego, empleando alguno de los métodos para la obtención del verdadero tamaño de planos, se genera una proyección auxiliar en la que se construye el cuadrado ABCD; el método utilizado en el ejemplo es el abatimiento en torno a la traza horizontal del plano δ, a través del cual se obtienen O^R y A^R, elementos que permiten la construcción del cuadrado $A^RB^RC^RD^R$.

En vista de que las proyecciones diédricas del punto C son conocidas, solamente hace falta hallar las proyecciones de los vértices B y D. Las del punto B se han hallado mediante la recta frontal del plano que pasa por ese punto, en tanto que las de D son fácilmente encontradas por paralelismo entre rectas, pues, como es sabido, los lados opuestos de un cuadrado son paralelos entre sí (Fig. 4.11-b).

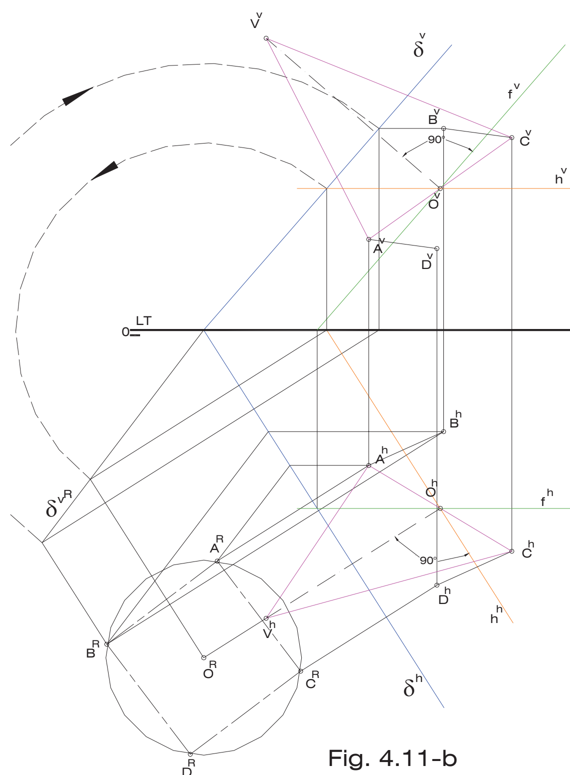


Fig. 4.11-b

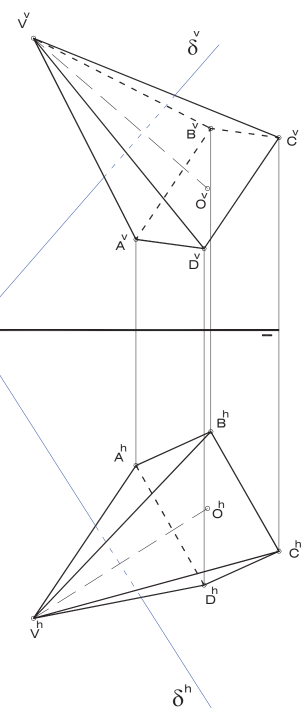


Fig. 4.11-c

Finalmente, se analiza la visibilidad de la doble proyección ortogonal de la pirámide (Fig. 4.11-c), aplicando el criterio expuesto en el punto 4.1.2, Pág. 76.

4.5 Poliedros regulares

Los poliedros regulares son, indudablemente, una de las formas más bellas de la geometría del espacio, no solamente por la simetría y uniformidad que presentan, sino también por las propiedades que ellos poseen.

El origen del estudio de los poliedros regulares corresponde a la escuela pitagórica, a la que los historiadores Eudemo de Rodas (315 a.C. aproximadamente) y Proclo (410-485) atribuyen el descubrimiento de los cinco poliedros regulares que existen. Los pitagóricos, quienes veían en los resultados matemáticos algo parecido a una verdad religiosa, pensaban que era muy importante la observación de que había solamente cinco poliedros regulares posibles. Muchos creen que fueron estos sabios quienes hicieron tal observación por vez primera y por eso llaman *sólidos pitagóricos* a los poliedros regulares. Sin embargo, los arqueólogos han encontrado imágenes de piedra de los sólidos de una antigüedad considerablemente mayor.

Los primeros estudios que se conocen sobre los cinco poliedros regulares se encuentra en los libros XIII y XIV de los Elementos de Euclides, en los cuales se exponen una gran cantidad de resultados acerca de estos cinco poliedros, así como una sencilla demostración de la imposibilidad de la existencia de otros. Euclides opina que Pitágoras únicamente conocía los poliedros regulares en los que convergen tres caras en cada vértice, es decir, el tetraedro, el hexaedro o cubo y el dodecaedro. Asimismo, Euclides sostiene que el descubrimiento de los otros dos se produjo en la Academia de Platón.

Se cree que fue Empédocles quien primero asoció el hexaedro, el tetraedro, el icosaedro y el octaedro con la tierra, el fuego, el agua y el aire, respectivamente. Estas sustancias eran los cuatro *elementos* de los griegos antiguos. Luego Platón asoció el dodecaedro con el universo pensando que, en vista de era tan diferente de los demás debía ser la sustancia de la cual estaban hechos los planetas y las estrellas – por entonces se creía que los cuerpos celestes debían estar hechos de una sustancia distinta de la que estaban hechas las cosas en la tierra – de ahí que a los poliedros regulares se los conozca también como *sólidos platónicos*.

Platón concibió el dodecaedro como una representación del universo, buscando en su interior todas las relaciones de simetría previsibles en aquél. Basándose en esta idea, Johann Kepler construyó una cosmología según la cual las órbitas circulares de los planetas estaban en proporción con los radios de las esferas inscritas en sólidos platónicos dispuestos uno dentro de otro. No fue sino hasta que conoció las observaciones de Tycho Brahe que Kepler se dio cuenta de su error y que concluyó que los planetas se mueven describiendo trayectorias elípticas.

Un poliedro es regular cuando todas las caras que lo constituyen resultan ser polígonos regulares iguales, presentando ángulos poliédricos idénticos. Se dice que dos poliedros con el mismo número de caras son semejantes cuando la forma de sus caras poliédricas también lo es y sus ángulos poliedros resultan iguales. Este principio tiene gran importancia al relacionar los volúmenes y áreas de poliedros semejantes, de manera que las áreas están relacionadas con los cuadrados de las aristas y los volúmenes con los cubos de dichas aristas.

A continuación se presenta una descripción de cada uno de los poliedro regulares, así como también se enumeran sus principales características, pasando luego a la representación en proyección ortogonal, estudiando para cada uno de ellos las posiciones genéricas que pueden adoptar con relación a un determinado plano de proyección.

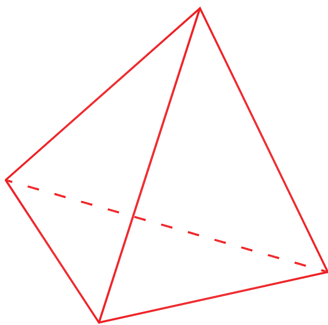
El Tetraedro está formado por cuatro triángulos equiláteros iguales, de forma que en cada vértice concurren tres de ellos; tiene cuatro vértices y seis aristas (Fig. 4.12-a).

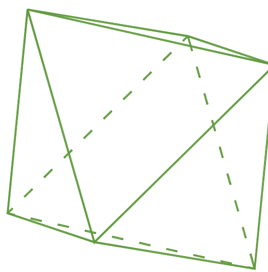
El Octaedro está constituido por ocho caras triangulares equiláteras iguales, coincidiendo cuatro de ellas en cada vértice; posee doce aristas y seis vértices (Fig. 4.12-b).

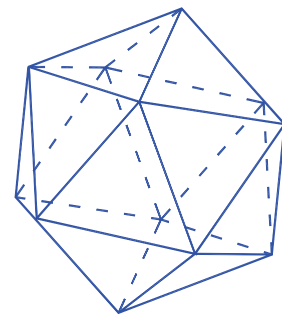
El Icosaedro tiene veinte caras triangulares equiláteras y doce vértices, en cada uno de los cuales convergen cinco aristas (Fig. 4.12-c).

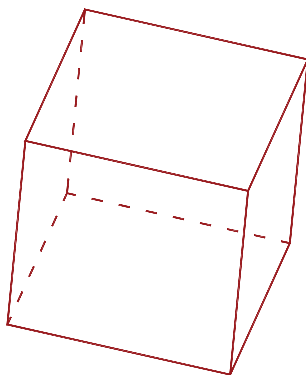
El Hexaedro está formado por seis caras cuadrangulares y doce vértices donde se produce la intersección de seis aristas (Fig. 4.12-d).

El Dodecaedro posee doce caras pentagonales y veinte vértices formados, cada uno de ellos, por la intersección de tres aristas (Fig. 4.12-e).


Fig. 4.12-a


Fig. 4.12-b


Fig. 4.12-c


Fig. 4.12-d

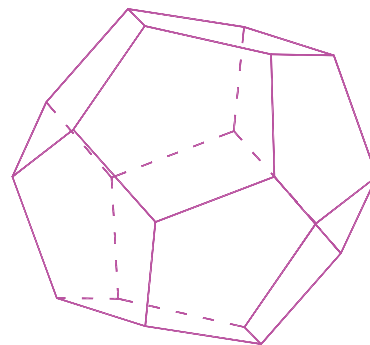

Fig. 4.12-e

Fig. 4.12: Los cinco poliedros regulares

Los poliedros regulares o platónicos son poliedros convexos, es decir, su superficie poliédrica no tiene más de dos puntos comunes a una recta que pertenezca al plano de alguna de sus caras, por lo que cumple con el Teorema de Euler, a saber:

$$C + V = A + 2$$

En esta expresión C es el número de caras, V es el número de vértices y A es el número de aristas de un poliedro.

Para determinar los posibles poliedros regulares es preciso establecer que la suma de los ángulos de las caras convergentes en un vértice de un poliedro convexo siempre debe ser menor que 360°, además, en cada vértice deben converger al menos tres caras. Si se

despliegan todas esas caras sobre un mismo plano que contenga al vértice considerado será posible medir dicha suma (Fig. 4.13) y al mismo tiempo establecer los poliedros regulares posibles.

Como los ángulos internos de un triángulo equilátero son iguales a 60° es posible agrupar en torno al vértice A tres, cuatro o cinco triángulos equiláteros iguales. De esta forma se obtienen el tetraedro, el octaedro y el icosaedro. No pueden agruparse seis triángulos, pues la suma de los ángulos es igual a 360° y por lo tanto no se genera un poliedro.
De igual manera pueden agruparse tres cuadrados en torno al punto A, generándose el hexaedro o cubo, en tanto que tres pentágonos dan lugar al dodecaedro. Resulta evidente que no es posible generar un poliedro regular con caras hexagonales o con polígonos regulares de más de cinco lados.

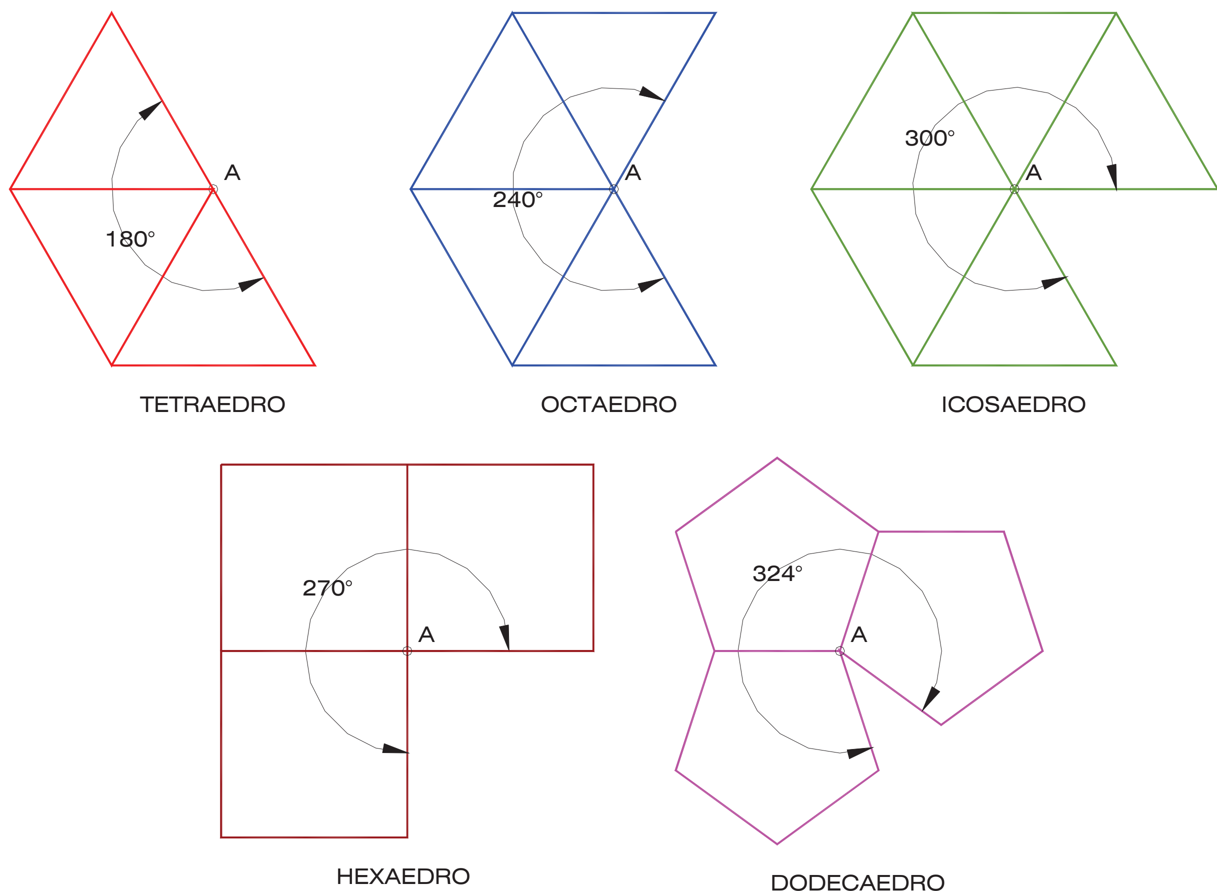


Fig. 4.13

4.5.1 Propiedades de los poliedros regulares

Cada uno de los cinco poliedros regulares existentes presenta en forma simultánea las siguientes propiedades:

- Existe un único punto interior a un poliedro regular tal que su distancia con respecto a todos y cada uno de los vértices es la misma. A este punto se lo denomina *centro del poliedro O*. Se llama radio "r_c" de un poliedro regular a la distancia que hay entre el centro y uno cualquiera de los vértices. Dicho radio es el radio de una esfera sobre

cuya superficie se encuentran todos los vértices; tal esfera recibe el nombre de *esfera circunscrita* al poliedro (Fig. 4.14-a).

- La proyección ortogonal del centro O de un poliedro regular sobre una de sus caras es siempre el centro de ésta. Por otra parte, el centro del poliedro se halla a igual distancia de todas las caras. Se llama *apotema* "r_i" del poliedro a la menor distancia del centro a una cualquiera de las caras. La esfera que tienen por centro al centro del poliedro regular y radio igual al apotema se denomina *esfera inscrita* en el poliedro. Esta esfera es tangente a cada una de las caras, siendo los puntos de tangencia los centros (O1, O2,....On) de cada una de ellas, por lo tanto, las rectas definidas por el centro del poliedro y los centros de cada cara son perpendiculares a la cara respectiva (Fig. 4.14-b).

- La distancia del centro O de un poliedro regular al punto medio de cualquiera de las aristas (M1, M2,....Mn) es el radio "r_t" de la *esfera tangente a las aristas*, siendo los puntos de tangencia los referidos puntos medios (Fig. 4.14-c).

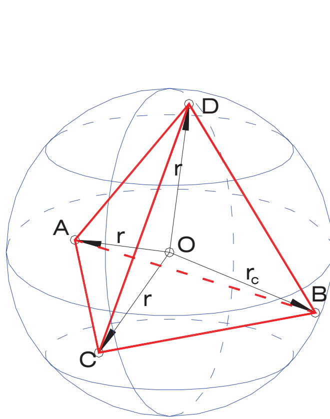


Fig. 4.14-a

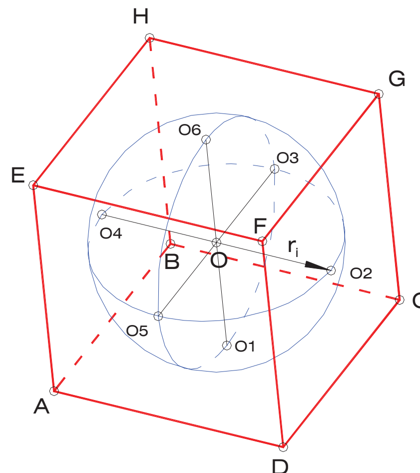


Fig. 4.14-b

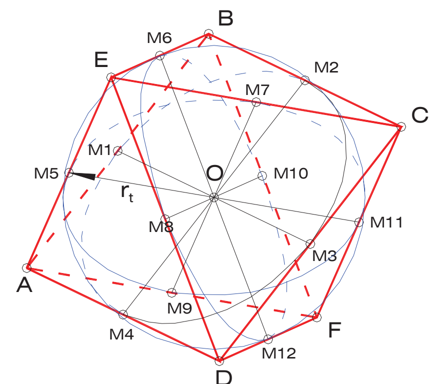


Fig. 4.14-c

- Al unir todos los vértices contiguos a un vértice dado de un poliedro regular, se forma una figura plana que constituye un polígono regular. Además, el radio correspondiente a dicho vértice es perpendicular al plano definido por el polígono y contiene al centro del mismo.

- En cada poliedro regular se identifican unas Secciones Principales, las cuales, una vez dibujadas, proporcionan todos los datos necesarios del poliedro de que se trate. Son producidas por un plano que pasa por dos aristas opuestas (hexaedro, dodecaedro e icosaedro), por una arista y el punto medio de la opuesta (tetraedro), o por una diagonal y perpendicular a dos aristas pasando por su punto medio (octaedro). De cada sección en particular se tratará en el estudio de cada uno de los poliedros regulares.

- Al unir los centros de las caras de un poliedro regular mediante líneas rectas se obtiene otro poliedro regular llamado *poliedro conjugado*. Éste tiene el mismo número de aristas que el poliedro original, en tanto que los números de caras y vértices están intercambiados. Por las condiciones de simetría que tienen los poliedros regulares se deduce con facilidad que el poliedro conjugado de un poliedro regular es otro poliedro regular.

Si se considera el poliedro conjugado del conjugado se obtiene un poliedro con el mismo número de caras, vértices y aristas que el inicial, es decir, del mismo tipo.

De esta manera, al tener el hexaedro seis caras, ocho vértices y doce aristas, su conjugado es un poliedro regular con ocho caras, seis vértices y doce aristas, es decir, un octaedro. Por lo señalado anteriormente se tiene que el conjugado de un octaedro es, a su vez un hexaedro (Fig. 4.15-a).

De forma similar, sin más que intercambiar el número de caras y el número de vértices, se tiene que el conjugado de un icosaedro es un dodecaedro y viceversa (Fig. 4.15-b).

El caso más curioso lo presenta el tetraedro, ya que su conjugado ha de tener el mismo número de caras que vértices tiene el tetraedro, es decir, cuatro. Así, el conjugado de un tetraedro es de nuevo un tetraedro (Fig. 4.15-c).

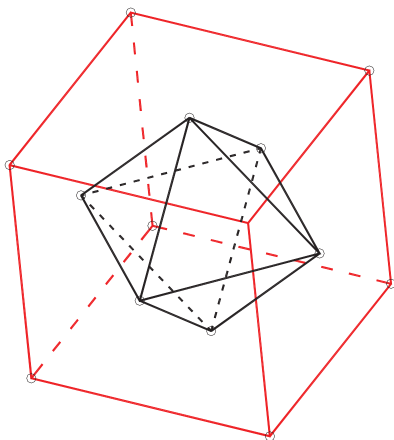


Fig. 4.15-a

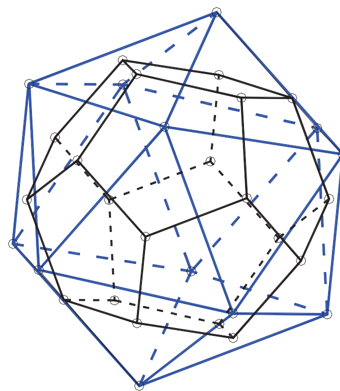


Fig. 4.15-b

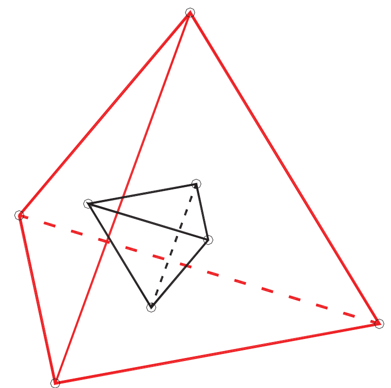


Fig. 4.15-c

4.5.2 El Tetraedro

El tetraedro es el poliedro regular formado por cuatro caras triangulares equiláteras, seis aristas y cuatro vértices. Dos aristas opuestas del poliedro forman entre sí noventa grados

La Sección Principal (Fig. 4.16-a) es la producida por cualquiera de los seis planos que pasan por una arista – BD en la figura - y por el punto medio de la arista opuesta. Dicho plano resulta ser perpendicular a la arista – AC en la figura - por cuyo punto medio pasa. Su forma es de triángulo isósceles, siendo el lado desigual una arista “a”, en tanto que los lados iguales corresponden a dos alturas de cara “hc”.

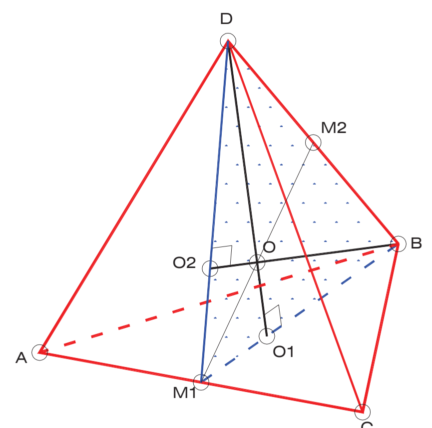


Fig. 4.16-a

El segmento de recta definido por D y por el centro O1 de la cara ABC representa la *altura del tetraedro* “h”. De forma análoga, existe una altura por cada vértice del poliedro, de manera que hay cuatro en total. En una sección principal se presentan dos alturas del tetraedro – DO1 y BO2 en la figura - las cuales son

perpendiculares a las alturas de cara y pasan por los extremos de la arista; el corte de dichas alturas del tetraedro no es más que el ortocentro de la sección principal.

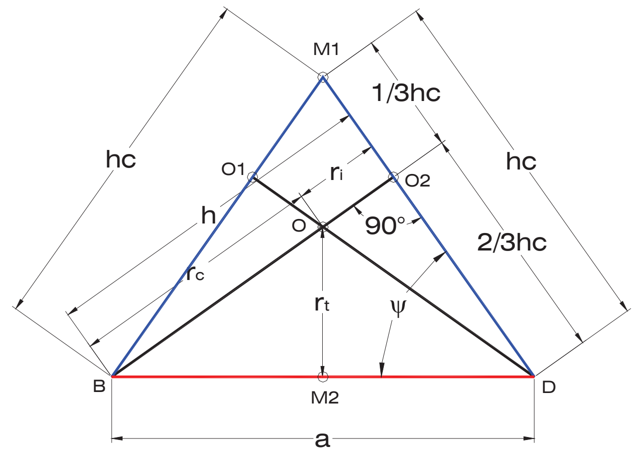


Fig. 4.16-b

El mencionado ortocentro no es más que el centro del tetraedro; la menor distancia de este punto a cualquiera de las alturas de cara BM1 y DM1 es el radio "r_i" de la esfera inscrita en el sólido y corresponde a la tercera parte de la altura del poliedro. La menor distancia del centro a la arista BD constituye el radio "r_t" de la esfera tangente a las aristas. Finalmente, la distancia de O a cualquiera de los puntos B y D es el radio "r_c" de la esfera circunscrita y es igual a las dos terceras partes de la altura del sólido (Fig. 4.16-b). Resulta, pues, evidente que la suma de los radios de las esferas inscrita y circunscrita es igual a la altura del tetraedro. La distancia entre los puntos M1 y M2, que es la menor distancia entre dos aristas opuestas, es el diámetro de la esfera tangente a las aristas ($2r_t$). Por otra parte, el ángulo ψ formado entre ambas alturas de cara en la sección principal es el ángulo entre caras adyacentes del tetraedro.

La sección principal permite la determinación de cualquiera de las dimensiones del tetraedro a partir de una de ellas. De ahí la importancia de su conocimiento y correcta construcción, pues es la llave que abre la solución de los problemas.

Si se secciona a un tetraedro mediante un plano paralelo a dos aristas opuestas – AB y CD en la Fig. 4.17-a – y que pase por el punto medio de otra arista – M1 en la figura – se genera una cuadrado cuyos vértice son los puntos medios de las cuatro aristas del poliedro con respecto a las cuales no es paralelo el plano considerado. Esta *sección cuadrada* del tetraedro divide al sólido en dos partes exactamente iguales y su centro es el centro del poliedro.

Por otra parte, la sección producida por un plano perpendicular a una de las alturas del tetraedro – DO1 en la figura - y que pase por el punto medio (K) de esta altura, resulta ser un triángulo equilátero, cuyos vértices son los puntos medios de tres de las aristas del sólido (Fig. 4.17-b).

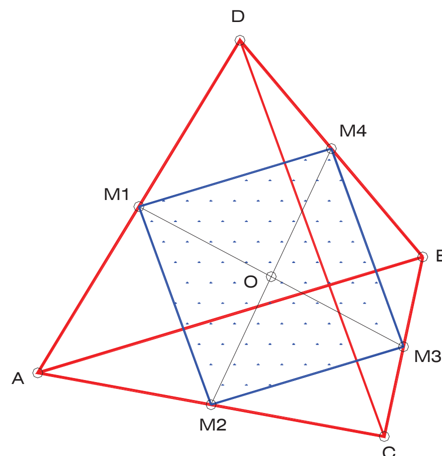


Fig. 4.17-a

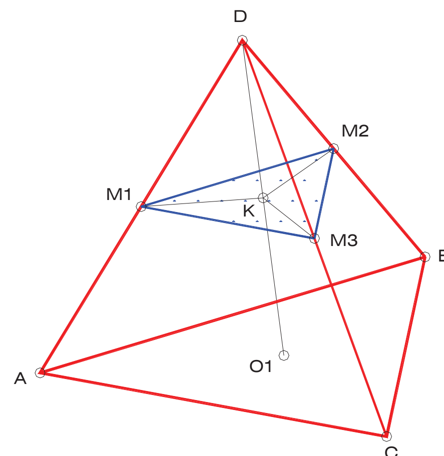


Fig. 4.17-b

4.5.2.1 Proyección cilíndrica ortogonal del tetraedro

El dibujo de las proyecciones de un poliedro regular depende de la correcta identificación de su forma y características, así como del pleno conocimiento de la forma y características de su sección principal.

Existen tres posiciones notables del tetraedro con respecto a un plano de proyección e infinidad de posiciones llamadas accidentales en las que no se verifica ninguna particularidad.

1) **Con una cara paralela al plano de proyección** (Fig. 4.18-a)
Sea el plano horizontal el plano de proyección considerado. Si una de las caras del tetraedro ABCD – la ABC en la figura – es paralela a PH, la línea de contorno aparente correspondiente resulta ser el polígono ABC, por lo que la proyección del sólido es un triángulo equilátero $A^hB^hC^h$. El centro de este polígono es la proyección de los puntos O1, centro de la cara ABC, y D, dado que la recta que ellos definen es perpendicular a PH.

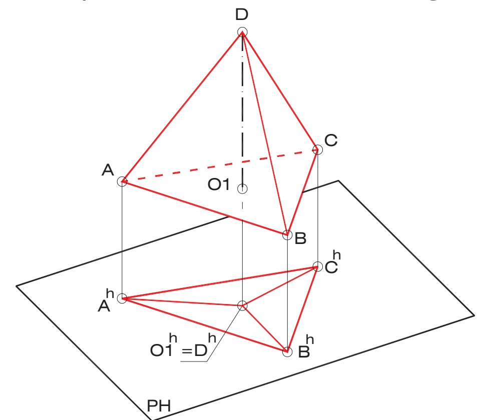


Fig. 4.18-a

2) **Con una arista perpendicular al plano de proyección** (Fig. 4.18-b)
Si una de las aristas del tetraedro, CD por ejemplo, es perpendicular al plano de proyección, la sección principal compuesta por el punto medio M2 de CD y la arista AB, opuesta a CD, será paralela a dicho plano. En consecuencia, el contorno de la proyección del sólido corresponde a un triángulo isósceles, proyección a su vez de la sección principal ABM2. La arista AB resulta paralela al plano de proyección, por lo que es vista en verdadero tamaño, y a una distancia de CD igual a la longitud de M1M2, segmento éste que es también paralelo al plano de proyección.

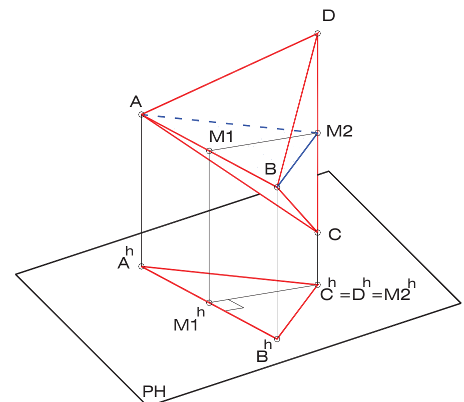


Fig. 4.18-b

3) **Con dos aristas opuestas paralelas al plano de proyección** (Fig. 4.18-c)
Si dos aristas opuestas del tetraedro, como AD y BC, por ejemplo, son paralelas al plano de proyección considerado, sus puntos medios M1 y M2 se encontrarán sobre una recta perpendicular a dicho plano. Además, las aristas AD y BC se proyectarán en verdadero tamaño y formando ángulo recto. El contorno de la proyección del sólido es un cuadrado $A^hB^hD^hC^h$ inscrito en una circunferencia de centro en la proyección de los puntos M1 y M2 y radio igual a la mitad de la longitud de las aristas. Los lados de este cuadrado tienen la misma longitud que el segmento M1M2, es decir, el diámetro de la esfera tangente a las aristas del tetraedro.

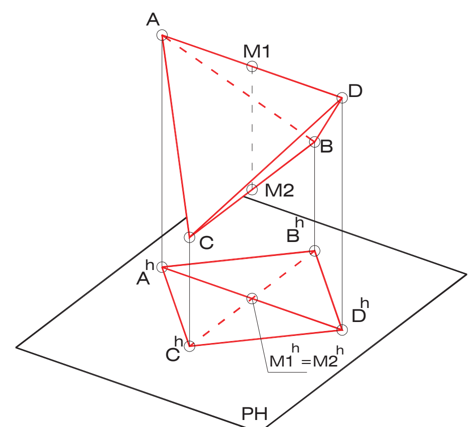


Fig. 4.18-c

4) Posición accidental con respecto al plano de proyección (Fig. 4.18-d)

El contorno de la proyección del tetraedro sobre un determinado plano cuando no se cumple alguna de las condiciones anteriores, corresponde a un cuadrilátero irregular. La construcción de dicha proyección exige el uso de algunos de los métodos estudiados para la determinación del verdadero tamaño de figuras planas, con la finalidad de dibujar una de las caras y/o una de las secciones principales y así hallar las dimensiones lineales del tetraedro.

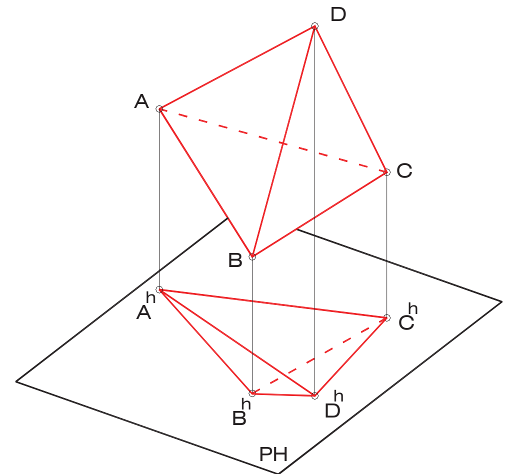


Fig. 4.18-d

Para ilustrar el proceso de construcción de la doble proyección ortogonal de un tetraedro ABCD, ubicado en posición accidental en relación a los dos planos de proyección del sistema, considérese el siguiente ejemplo: sea M el punto medio de la arista BC del poliedro y sea "s" una recta sobre la cual se encuentra la arista AD. Estos elementos determinan un plano δ en el cual está contenida la sección principal ADM; aplicando uno de los métodos conocidos es posible dibujar dicha sección en verdadero tamaño.

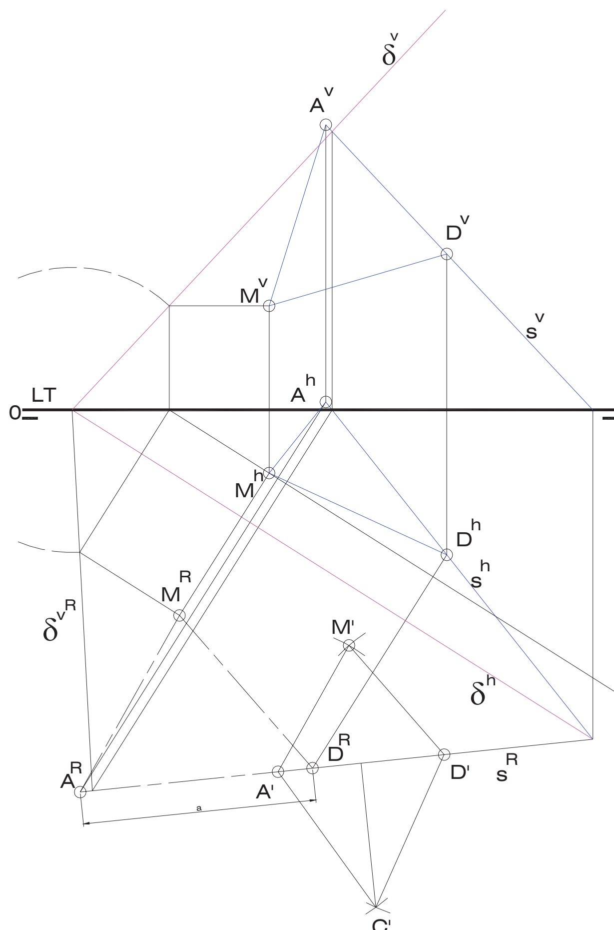


Fig. 4.19-a

Abatiendo el plano δ sobre PH se obtienen s^R y M^R, elementos que permiten el trazado de la sección principal aprovechando la semejanza existente entre la sección principal de tetraedro ABCD y la sección principal de cualquier otro. Para ello se selecciona un segmento cualquiera A'D' sobre s^R y se construye un triángulo equilátero A'D'C', cara de un tetraedro de tamaño arbitrario. Luego, se dibuja un triángulo isósceles de lado desigual A'D' y cuyos lados iguales tienen por longitud la altura del triángulo equilátero A'D'C'; de esta forma se obtiene la sección principal del un tetraedro de arista A'D' (Fig. 4.19-a).

Trazando por M^R líneas paralelas a los segmentos M'D' y M'A' de la sección principal auxiliar, se obtienen, en los cortes con s^R, los puntos D^R y A^R, respectivamente, con lo cual se completa la sección principal del tetraedro sobre el plano δ abatido. Seguidamente, se hallan las proyecciones diédricas de los puntos A y D, ambos sobre las proyecciones homónimas de la recta "s" (Fig. 4.19-a).

La arista BC, cuyo punto medio es el punto M, está sobre una recta "r" perpendicular al plano de sección

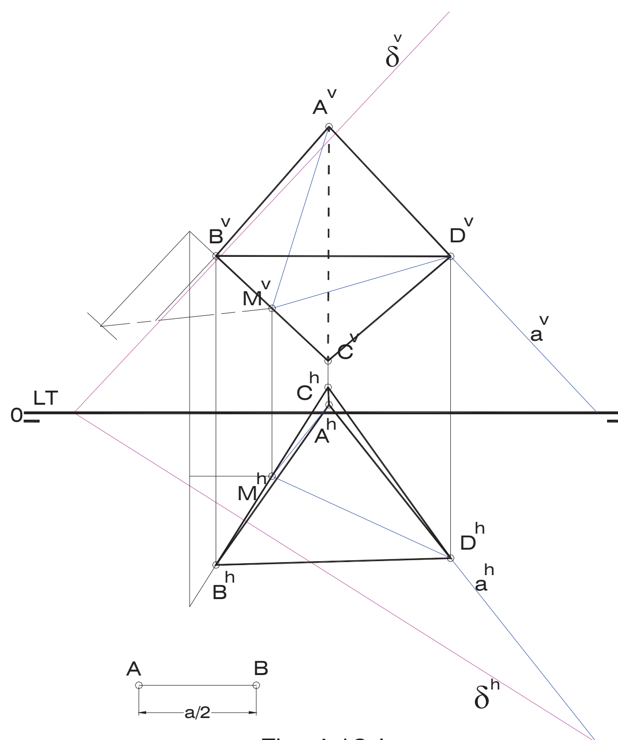


Fig. 4.19-b

principal δ. Es necesario determinar el verdadero tamaño de un segmento de la recta "r" comprendido entre M y otro cualquiera de sus puntos, con el fin de consignar sobre él la mitad de la longitud de la arista del tetraedro, dando lugar a las proyecciones del punto B. En vista de que M es el punto medio de BC y de que el punto medio de un segmento tiene propiedad proyectiva en los sistemas cilíndricos, la determinación de las proyecciones del vértice C no tiene mayor dificultad (Fig. 4.19-b).

Finalmente, se debe analizar la visibilidad de las aristas del sólido en ambas proyecciones, aplicando el criterio estudiado en el apartado 4.1.2, Pág. 76. De esa forma se obtiene que la arista AC no es visible en proyección vertical, mientras todas las aristas son visibles en proyección horizontal.

4.5.3 El Hexaedro

El hexaedro, mejor conocido como cubo, es el poliedro regular formado por seis caras cuadradas, ocho vértices y doce aristas. El ángulo entre caras adyacentes es de 90°, al igual que el ángulo formado entre aristas convergentes en un vértice.

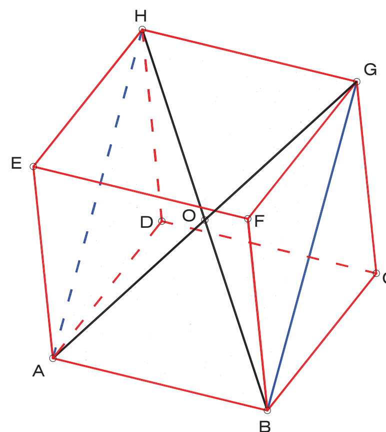


Fig. 4.20-a

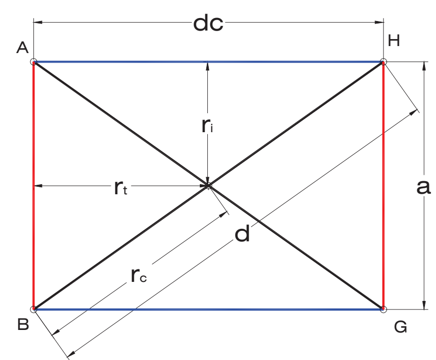


Fig. 4.20-b

La Sección Principal – seis en total - es la producida por un plano que pasa por dos aristas opuestas (AB y GH en la Fig. 4.20-a). La forma de dicha sección es de rectángulo, cuyos lados menores corresponden a dos aristas de longitud "a", en tanto que los lados mayores son dos diagonales de cara de longitud "dc". Las dos diagonales de este rectángulo son dos de las *diagonales principales* del poliedro de longitud "d", longitud ésta igual al diámetro $2r_c$ de la esfera circunscrita al sólido, sobre cuya superficie se encuentran los ocho vértices; el corte de las diagonales principales viene a ser el centro O del hexaedro.

La menor distancia que hay entre el centro del polígono y una de las aristas es el radio r_t de la esfera tangente a dichas aristas, en tanto que la menor distancia entre O y una de las diagonales de cara corresponde al radio r_i de la esfera inscrita en el hexaedro, la cual es tangente a todas y cada una de las caras del sólido en sus centros (Fig. 4.20-b).

Si se secciona a un hexaedro mediante un plano perpendicular a una de las diagonales principales y que pase por el centro O, se obtiene un hexágono regular, cuyos vértices son puntos medios de aristas (Fig. 4.21-a). Esta *sección hexagonal* divide al sólido en dos mitades congruentes y exactamente iguales, siendo el centro de la sección el centro O del poliedro. Los lados del hexágono tienen una longitud igual a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son mitades de aristas. Ahora bien, un plano que pase por uno de los vértices del hexaedro y sea perpendicular a cualquiera de las diagonales principales, con excepción de aquella que contiene al referido punto, corta al sólido produciendo una *sección triangular equilátera* (Fig. 4.21-b) cuyo centro es el punto de intersección – K en la figura - entre la diagonal principal en cuestión y el plano secante, siendo sus vértices tres de los vértices del poliedro – E, D y B en la figura – y sus lados tres diagonales de cara. El centro de la sección se encuentra a una distancia igual a 1/3d de uno de los vértices extremos (A) de la diagonal principal y, como es obvio a 2/3d del otro (G).

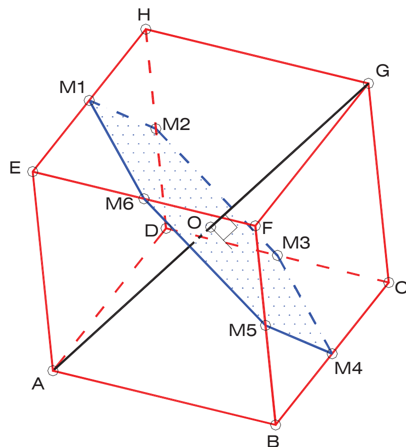


Fig. 4.21-a

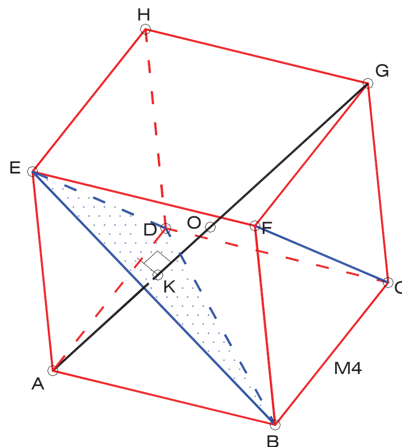


Fig. 4.21-b

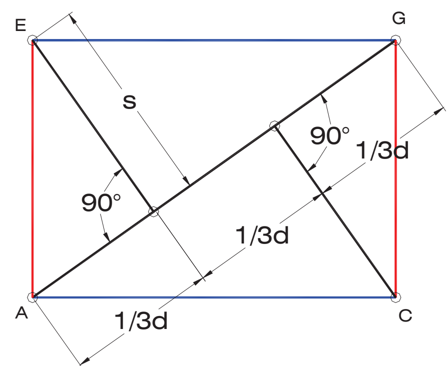


Fig. 4.21-c

De lo anterior se deduce lo siguiente: si en la sección principal se trazan perpendiculares a la diagonal principal por los vértices del rectángulo (Fig. 4.21-c), se obtienen puntos (K y L) que dividen a dicha diagonal en tres partes iguales. La distancia "s" corresponde a la menor distancia entre un vértice y la diagonal principal del hexaedro.

4.5.3.1 Proyección cilíndrica ortogonal del hexaedro

1) Con una cara paralela al plano de proyección (Fig. 4.22-a)

Si una de las caras del hexaedro ABCDEFGH – la ABCD en la figura – es paralela al plano de proyección, la línea de contorno aparente correspondiente resulta ser la cara ABCD, por lo tanto, la proyección del poliedro es el cuadrado $A^hB^hC^hD^h$.

El centro de este polígono es la proyección del centro del hexaedro y sus lados son de longitud igual a las aristas. Los cuatro vértices restantes del sólido, es decir, E, F, G y H, se confunden en la proyección con A, B, C y D, respectivamente, debido a que las aristas AE, BF, CG y DH son perpendiculares al plano de proyección.

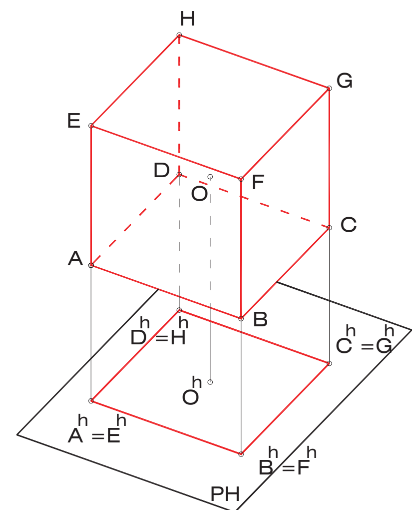


Fig. 4.22-a

2) Con una sección principal perpendicular al plano de proyección y una arista de la sección paralela a dicho plano (Fig. 4.22-b)
Considérese a la sección principal AEGC en un plano perpendicular a PH, y a la arista AE – y por lo tanto también CG – de dicha sección paralela a PH.

El contorno de la proyección horizontal del hexaedro es un rectángulo que corresponde a una sección principal, aquella que es perpendicular a la primera y por lo tanto paralela a PH (BDHF en la figura). Los vértices A y C del poliedro se confunden en la proyección, al igual que E y G.

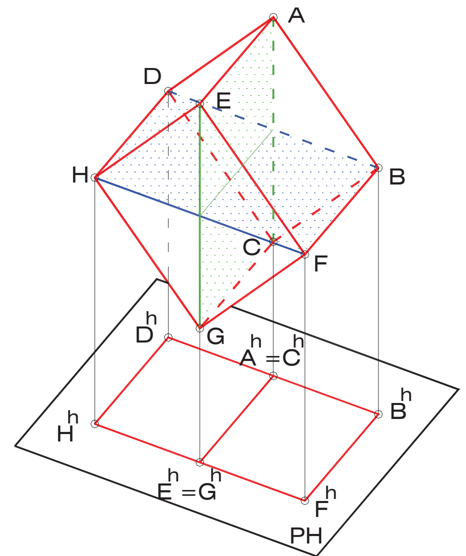


Fig. 4.22-b

3) Con una diagonal principal perpendicular al plano de proyección (Fig. 4.22-c)
Si el hexaedro se encuentra en una posición tal que una de sus diagonales principales, la AG, por ejemplo, es perpendicular al plano de proyección considerado, las secciones triangulares BDE y CHF se proyectan en verdadero tamaño, por ser ellas perpendiculares a la diagonal principal AG. El contorno de la proyección del sólido es el hexágono regular $B^hF^hE^hH^hD^hC^h$, cuyo centro es la proyección de los vértices A y G y de radio y lados de longitud “s”, menor distancia entre los vértices del sólido y la diagonal AG.

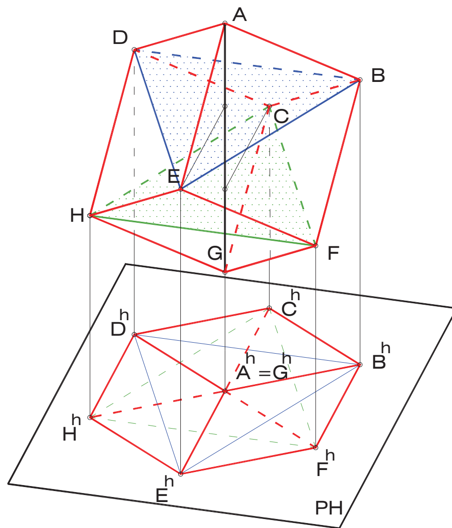


Fig. 4.22-c

Los vértices A y G son el más alto y el más bajo, respectivamente, en la figura; los otros seis vértices se encuentran en dos grupos (secciones triangulares BDE y CHF) sobre planos situados a una distancia igual a la tercera parte de la longitud de la diagonal principal, medida a partir de A y G.

4) Posición accidental con respecto al plano de proyección (Fig. 4.22-d)
Existen infinitas posiciones que puede adoptar el hexaedro con relación a un plano de proyección tales que no se cumple ninguna de las condiciones señaladas en los puntos anteriores. En esos casos, el contorno de la proyección del sólido sobre dicho plano resulta ser un hexágono irregular, haciéndose indispensable la aplicación de alguno de los métodos en la construcción de caras o secciones principales para así encontrar las proyecciones de todos y cada uno de los vértices del poliedro.

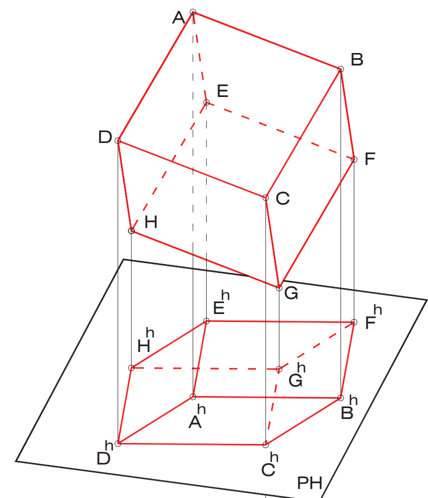


Fig. 4.22-d

Considérese el siguiente ejemplo, el cual ilustra el proceso de construcción de la doble proyección ortogonal de un hexaedro en posición accidental con respecto a PV y PH, siendo el punto O el centro del

sólido y A uno de sus vértices y sabiendo que el plano δ que contiene a la sección principal ACGE forma 90° con el plano horizontal.

En primer lugar, es necesario construir la sección principal ACGE sobre el plano δ (proyectante horizontal que contiene a los puntos O y A). Para ello se ha generado una nueva proyección sobre un plano paralelo a δ en la cual se dibujado la sección $A^2C^2G^2E^2$ en verdadero tamaño (Fig. 4.23-a).

Para dibujar esta sección principal es necesario recurrir al trazado auxiliar de la sección principal (Fig. 4.23-b) de un hexaedro arbitrario, partiendo de un cuadrado de lado "a'" y diagonal "dc'", elementos con los cuales se construye el rectángulo A'C'G'E'. A continuación se determina el punto de corte de las diagonales de dicho rectángulo, punto que viene a ser el centro O del hexaedro, y se construye una circunferencia de centro en O y radio igual al segmento OA del problema. Finalmente, prolongando las diagonales del rectángulo A'C'G'E' se obtienen, en los cortes con la circunferencia los vértices A, C, G y E de la sección principal correspondiente al hexaedro que se desea construir.

La sección principal así construida debe ser copiada convenientemente en la proyección auxiliar, para lo cual se apela al trazado de uno cualquiera de los triángulos que conforman al rectángulo ACGE (AOE en la figura).

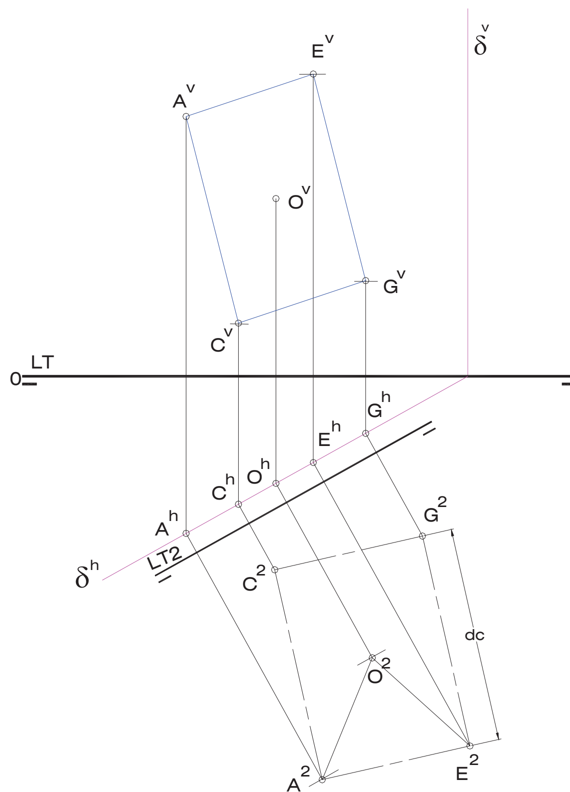


Fig. 4.23-a

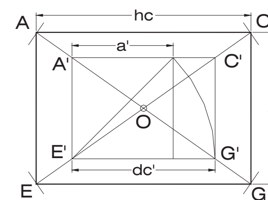


Fig. 4.23-b

Una vez hallada la doble proyección ortogonal de los vértices C, G y D del sólido, se determinan los puntos medios de las diagonales de cara AC y EG, los cuales corresponden a los centros O1 y O2 de las caras ABCD y EFGH, respectivamente.

Analizando las características del hexaedro y las relaciones geométricas existentes entre sus elementos, es muy fácil darse cuanta de que las rectas que contienen a las diagonales de cara DB y HF son perpendiculares al plano δ que contiene a la sección principal ACGE. Por lo tanto, trazando dichas rectas por los puntos O1 y O2, puntos medios de DB y HF, respectivamente, y consignado sobre ellas una longitud igual a la mitad de la diagonal de cara a cada lado de tales puntos, se obtienen las proyecciones de D, B, G y H, con lo cual se completan los vértices del sólido (Fig. 4.23-c).

Por último, se debe analizar la correspondiente visibilidad, aplicando el criterio ya establecido (Pág. 76).

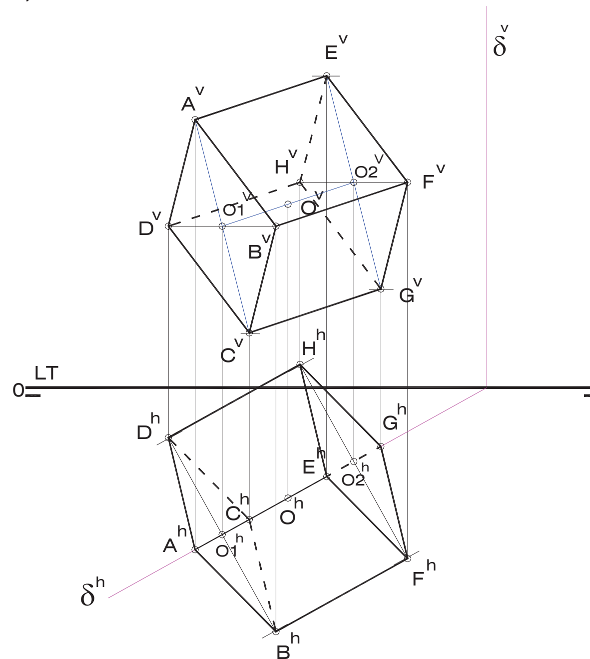


Fig. 4.23-c

4.5.4 El Octaedro

El octaedro es el poliedro regular constituido por ocho caras triangulares equiláteras, seis vértices y doce aristas. Puede ser interpretado como la unión de dos pirámides idénticas e invertidas con respecto a sus bases cuadradas, siendo las aristas básicas iguales en tamaño a las laterales.

Cada una de las seis Secciones Principales son producidas por planos que pasan por una diagonal – EF en la figura - y son perpendiculares a dos aristas opuestas – AB y CD en la figura - en sus puntos medios (Fig. 4.24-a). La forma de la sección principal es de rombo, cuyos lados corresponden a cuatro alturas de cara “hc”, siendo su diagonal menor un segmento de longitud igual a la de las aristas “a”, en tanto que su diagonal mayor es una diagonal “d” del poliedro. El punto de corte de ambas diagonales del rombo viene a ser el centro O del sólido; los extremos de la diagonal mayor son dos vértices opuestos E y F y los extremos de la diagonal menor son los puntos medios de dos aristas opuestas M1 y M2.

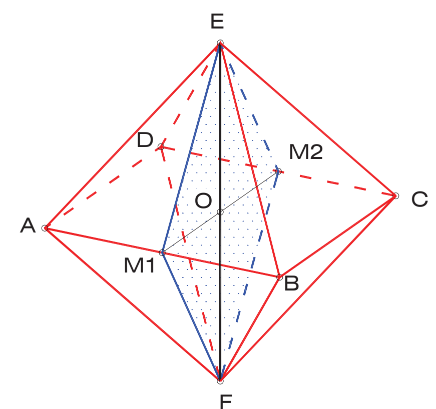


Fig. 4.24-a

El ángulo ψ formado entre dos alturas de cara en la sección principal es el mismo ángulo entre caras adyacentes del poliedro.

La distancia que hay entre O y uno de los vértices es el radio r_c de la esfera circunscrita al octaedro, en tanto que la menor distancia entre O y una de las alturas de cara corresponde al radio r_i de la esfera inscrita en el sólido. Por otra parte, la distancia entre O y cualquiera de los puntos medios (M1 o M2) de las aristas es el radio r_t de la esfera tangente a las aristas (Fig. 4.24-b).

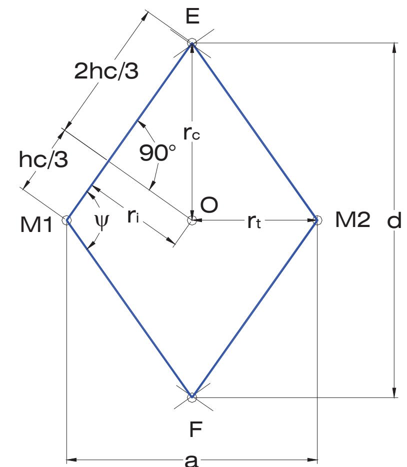


Fig. 4.24-b

Un plano perpendicular a una diagonal y que pase por el centro del octaedro genera una *sección cuadrada o sección diagonal*, la cual divide al poliedro en dos sólidos congruentes idénticos: dos pirámides de base cuadrada. El centro de la sección es el propio centro del sólido, en tanto que sus vértices son cuatro de los vértices del mismo – A, B, C y D en la figura - de manera que los lados de la sección son aristas del octaedro (Fig. 4.25-a).

De igual manera es posible obtener una sección cuadrada mediante el corte de una plano perpendicular a una diagonal – AE en la figura - y que pase por el punto medio K del segmento comprendido entre el centro del sólido y uno de los extremos de dicha diagonal. Los vértices de la sección cuadrada resultante son los puntos medios de cuatro aristas convergentes en un vértice del octaedro (Fig. 4.25-b) y su centro es el mencionado punto K.

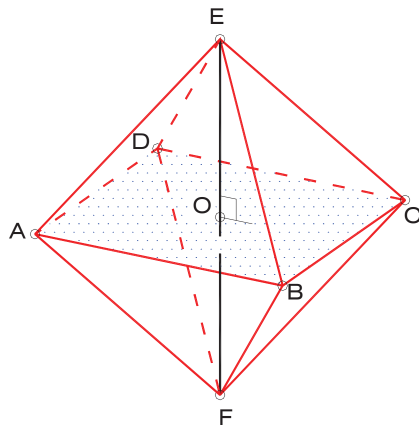


Fig. 4.25-a

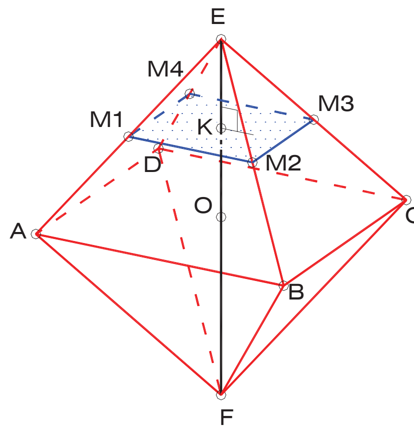


Fig. 4.25-b

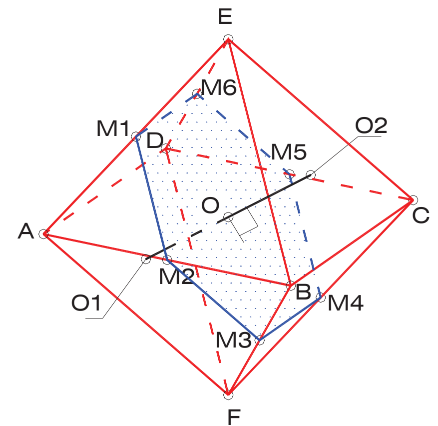


Fig. 4.25-c

Por otra parte, el corte producido por un plano que pase por el centro O del sólido y sea paralelo a una de las caras – BCE en la figura - produce una *sección hexagonal* regular, cuyos vértices corresponden a puntos medios de aristas y de centro igual al del octaedro. El plano de esta sección resulta ser perpendicular a la recta que pasa por los centros (O1 y O2) de dos caras opuestas (Fig. 4.25-c).

4.5.4.1 Proyección cilíndrica ortogonal del octaedro

1) Con una cara paralela al plano de proyección (Fig. 4.26-a)

Si una de las caras de un octaedro ABCDEF – la ECD en la figura – es paralela al plano de proyección, también lo será la cara opuesta, por lo que la proyección de ambas caras sobre el plano considerado corresponde a dos triángulos equiláteros de igual centro e invertidos, cuyos lados tienen una longitud "a". El contorno de la proyección del poliedro será, entonces, un hexágono regular.

La diferencia de altura entre los triángulos ECD y AFB de la figura es igual a la menor distancia entre las dos caras opuestas, lo que es igual al diámetro de la esfera inscrita en el sólido $2r_i$.

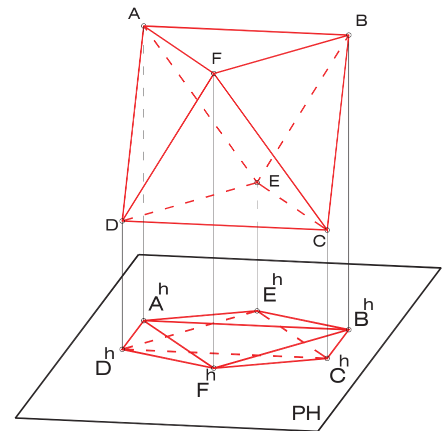


Fig. 4.26-a

2) Con una arista perpendicular al plano de proyección (Fig. 4.26-b)

Si una de las aristas del octaedro – AD en la figura - es perpendicular al plano de proyección considerado, el contorno de la proyección del sólido corresponde a una sección principal, aquella que es perpendicular a dicha arista. Por otra parte, un par de aristas opuestas – AB y CD – son paralelas al plano de proyección y se proyectan sobre una misma línea, ya que el plano de la sección diagonal correspondiente es perpendicular al de proyección.

Los vértices del sólido se encuentran en tres niveles de altura; la diferencia de altura entre los más altos – A y B – y los más bajos – C y D – es igual a la longitud de las aristas, en tanto que los vértices restantes – E y F – se encuentran a una distancia igual a la mitad de dicha longitud por debajo de los más altos.

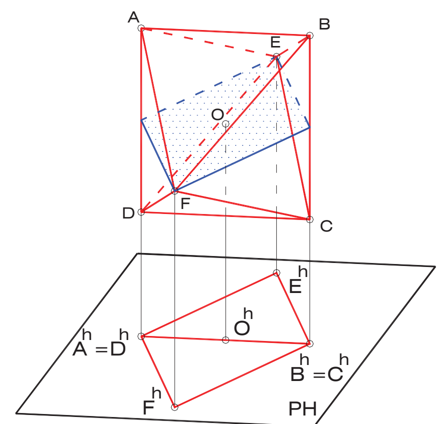


Fig. 4.26-b

3) Con una diagonal perpendicular al plano de proyección (Fig. 4.26-c)

Es evidente que si una de las diagonales del octaedro – EF en la figura – es perpendicular al plano de proyección de referencia (PH), el contorno de la proyección del sólido es un cuadrado correspondiente a una sección diagonal – ABCD - cuyos lados tienen igual longitud que las aristas del poliedro, mientras que en su centro coinciden las proyecciones de los extremos – E y F – de la diagonal perpendicular a PH.

La diferencia de altura entre los vértices A, B, C y D que conforman el contorno de la proyección y cada uno de los extremos de la diagonal EF, es igual a la mitad de la longitud de ésta, es decir, el radio de r_c de la esfera circunscrita al sólido.

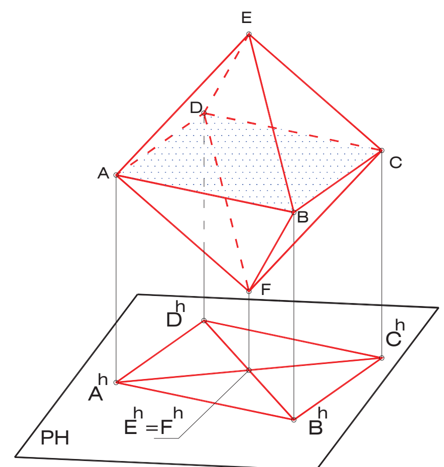


Fig. 4.26-c

4) Posición accidental con respecto al plano de proyección (Fig. 4.26-d)

Existen infinidad de posiciones del octaedro con respecto a un determinado plano de proyección en las cuales nos se verifica alguna de las condiciones anteriores. En tales circunstancias, el contorno de la proyección correspondiente del poliedro es siempre un cuadrilátero irregular de lados opuestos paralelos (paralelogramo).

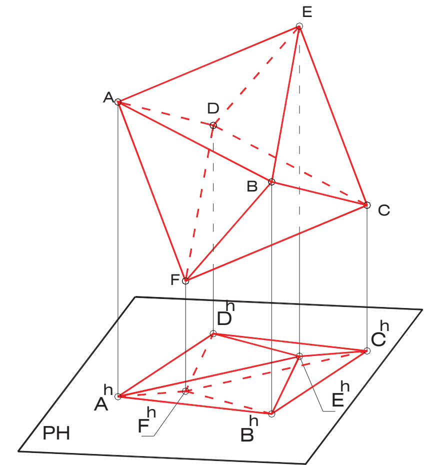


Fig. 4.26-d

El siguiente es un ejemplo de aplicación al sistema diédrico: sea el punto A un vértice de un octaedro y sea "r" una recta sobre la cual se encuentra la diagonal del sólido EF; se pide construir la doble proyección ortogonal y determinar la correspondiente visibilidad.

La sección diagonal ABCD se encuentra contenida en un plano π perpendicular a la recta "r". Dicho plano debe ser construido dibujando las proyecciones de una frontal y una horizontal perpendiculares a "r", dada la condición de recta oblicua que ésta tiene. El punto de intersección entre la recta "r" y el plano π es el centro de la sección diagonal ABCD y, por lo tanto, el centro del octaedro.

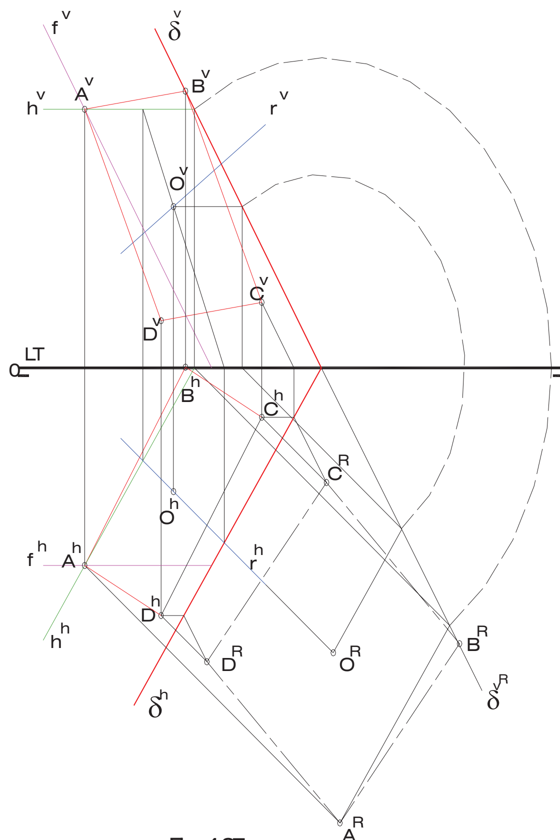


Fig. 4.27-a

La construcción de las proyecciones del polígono ABCD debe realizarse previo el trazado de dicho polígono en verdadero tamaño, para lo cual se han abatido los puntos A y O del plano π sobre PH usando rectas notables (Fig. 4.27-a).

Partiendo del verdadero tamaño "a" de una arista del octaedro, el cual se obtiene del polígono $A^R B^R C^R D^R$, se construye un triángulo equilátero y se determina su altura "hc". Luego, con las dimensiones "a" y "hc" se construye la sección principal del poliedro, en el que la diagonal mayor tiene una longitud "d" (Fig. 4.27-b). Este trazado debe ser realizado aparte, ya que no forma parte de las proyecciones o de los métodos auxiliares que, como el abatimiento, se emplean en la ejecución del ejercicio.

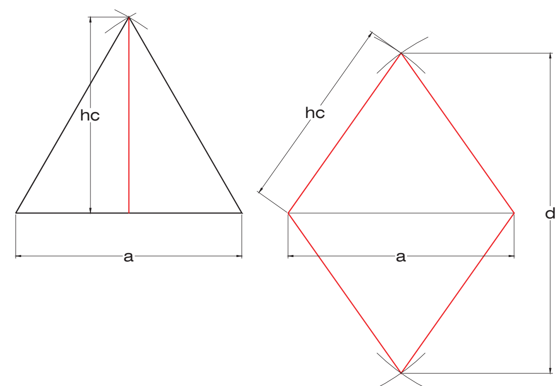


Fig. 4.27-b

Una vez determinado el verdadero tamaño de un segmento OX de la recta "r", lo cual

se ha realizado aplicando abatimiento, se procede a consignar la mitad de la longitud “d” sobre dicho verdadero tamaño, dando lugar al vértice E de la diagonal del poliedro contenida en la recta “r”.

Seguidamente, se hallan las proyecciones del otro extremo de la diagonal (F) copiando del otro lado de O y sobre “r” la distancia OE. Esta operación se puede realizar en las proyecciones diédricas, sin tener que utilizar el verdadero tamaño, dada la propiedad proyectiva que tiene el punto medio (O) de un segmento en cualquiera de los sistemas cilíndricos.

Finalmente, se unen mediante líneas rectas las proyecciones de los diferentes vértices del poliedro (Fig. 4.27-c), aplicando un razonamiento lógico, para luego analizar la visibilidad de las aristas del sólido, mediante la comparación de la cota y el vuelo de sus vértices y (ver Pág. 76).

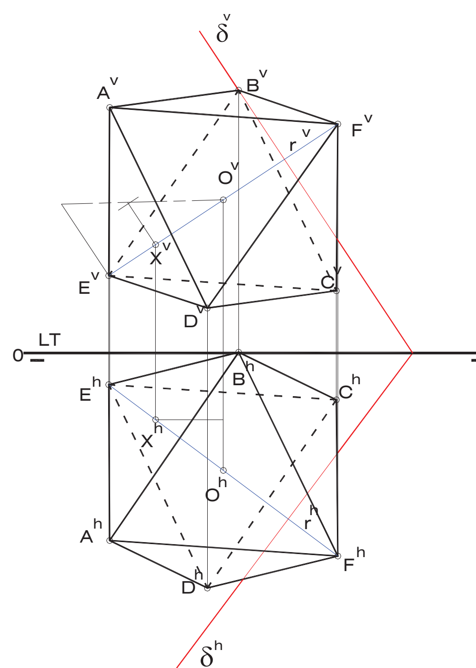


Fig. 4.27-c

4.5.5 El Dodecaedro

Este poliedro regular está conformado por doce caras pentagonales regulares, veinte vértices y treinta aristas. Existe paralelismo entre las caras opuestas del sólido, al igual que entre los pares de aristas opuestas.

La sección principal del dodecaedro – quince en total - es generada por un plano que contiene a dos aristas opuestas y tiene forma de hexágono irregular, el cual posee dos lados opuestos iguales de longitud ”a” – arista del poliedro - y otros cuatro lados iguales cuya longitud es la de la altura de cara del sólido (Fig. 4.28-a), siendo las dos diagonales mayores de la sección, dos de las diagonales del dodecaedro. Por otra parte, cada plano de sección principal es perpendicular a una de las diagonales del poliedro, como es el caso de IQ en la figura.

La distancia “w” entre las dos aristas de la sección principal es igual a la diagonal de un pentágono cuyo lado es igual a la diagonal “d” de una cara (Fig. 4.28-b). Dicha distancia es también el diámetro $2r_t$ de la esfera tangente a las aristas del dodecaedro. La menor distancia del centro O de sección – que es el mismo centro del sólido – a cualquiera de las cuatro alturas de cara es el radio r_i de la esfera inscrita en el poliedro, en tanto que la distancia del punto O a cualquiera de los cuatro vértices es el radio r_c de la esfera circunscrita al sólido. El doble de esta distancia es igual a la longitud de las diagonales del poliedro (AN y BL en la figura).

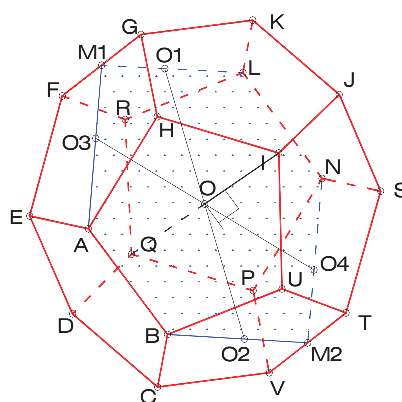


Fig. 4.28-a

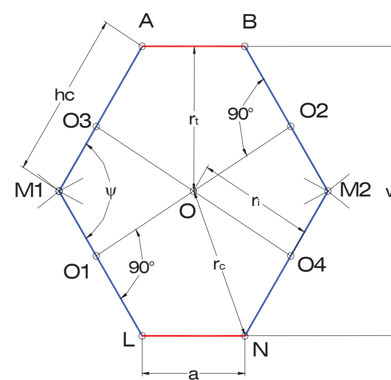


Fig. 4.28-b

Una línea perpendicular a dos alturas de cara trazada por el centro O, corta a dichas alturas en sus respectivos centros de cara.

El ángulo ψ formado entre dos alturas de cara en la sección principal es el ángulo entre las caras adyacentes del dodecaedro.

En la Fig. 28-c se ilustra el método de construcción de la sección principal de un dodecaedro, partiendo de la longitud de una arista del sólido.

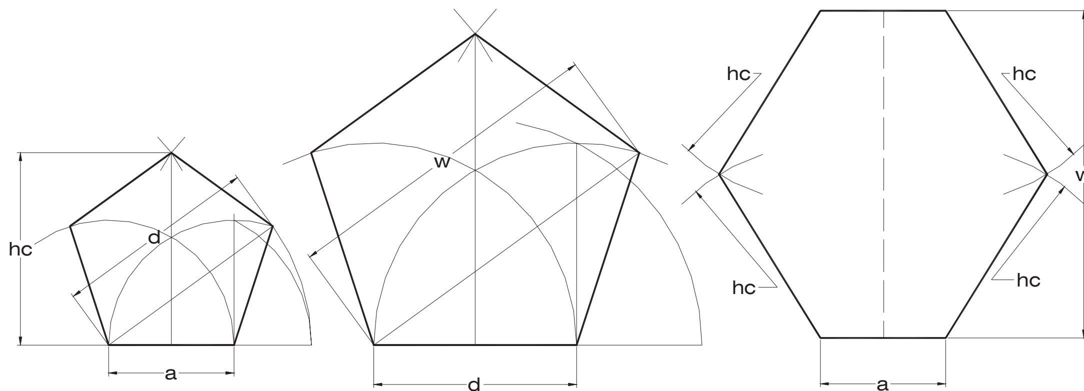


Fig. 4.28-c

Sea un plano perpendicular a una de las diagonales del dodecaedro – RP en la Fig. 4.29-a – que pasa por uno de los vértices; la sección generada de esta manera es un triángulo equilátero de lados iguales a las diagonales de tres caras convergentes en uno de los extremos (R) de la diagonal en cuestión. Las veinte *secciones triangulares* posibles conforman un icosaedro.

Si se construye un plano perpendicular a una de las diagonales del dodecaedro y que pase por el centro del sólido, se produce una *sección hexagonal regular*, cuyos vértices corresponden a puntos medios de aristas, tal y como se muestra en la Fig. 4.29-b.

Un plano que pase por el centro del dodecaedro y que sea perpendicular a la recta definida por los centros de dos caras opuestas, corta al sólido según un decágono regular de vértices en diez de los puntos medios de las aristas del poliedro (Fig. 4.29-c).

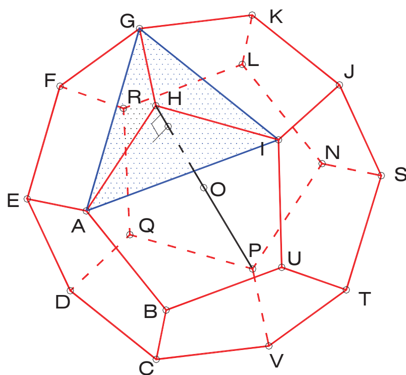


Fig. 4.29-a

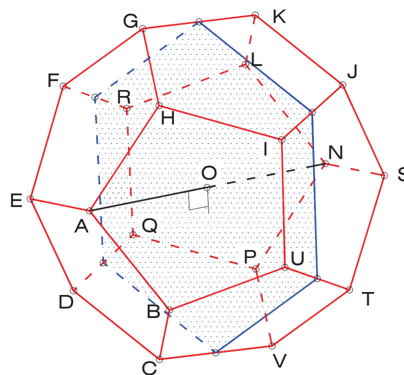


Fig. 4.29-b

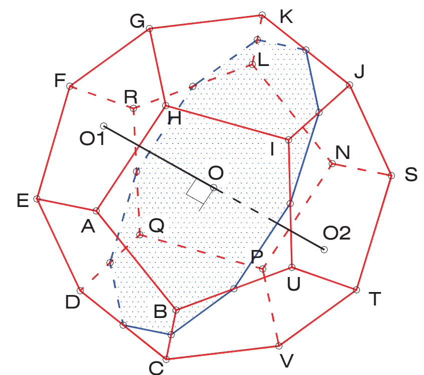


Fig. 4.29-c

4.5.5.1 Proyección cilíndrica ortogonal del dodecaedro

1) Con una cara paralela al plano de proyección (Fig. 4.30-a)
Si una de las caras del dodecaedro –NSTVP en la figura – es paralela al plano de proyección, también lo será la cara opuesta – AEFGH en la figura - y, en consecuencia, la proyección de ambas caras sobre el plano considerado corresponde a dos pentágonos regulares concéntricos e invertidos, cuyos lados tienen una longitud "a". El radio "r" de la circunferencia que circunscribe a estos polígonos es igual al radio de la circunferencia que circunscribe a una de las caras del dodecaedro.

El contorno de la proyección del sólido es un decágono regular inscrito en una circunferencia de radio "s" igual a la menor distancia que separa a uno de los vértices (B o L) de una de las secciones principales perpendiculares a PH de la línea definida, en esa misma sección, por dos centros de caras opuestas (O1 y O2). Los vértices del decágono se encuentran en la prolongación de los radios correspondientes a los vértices de la proyección de las caras paralelas a PH.

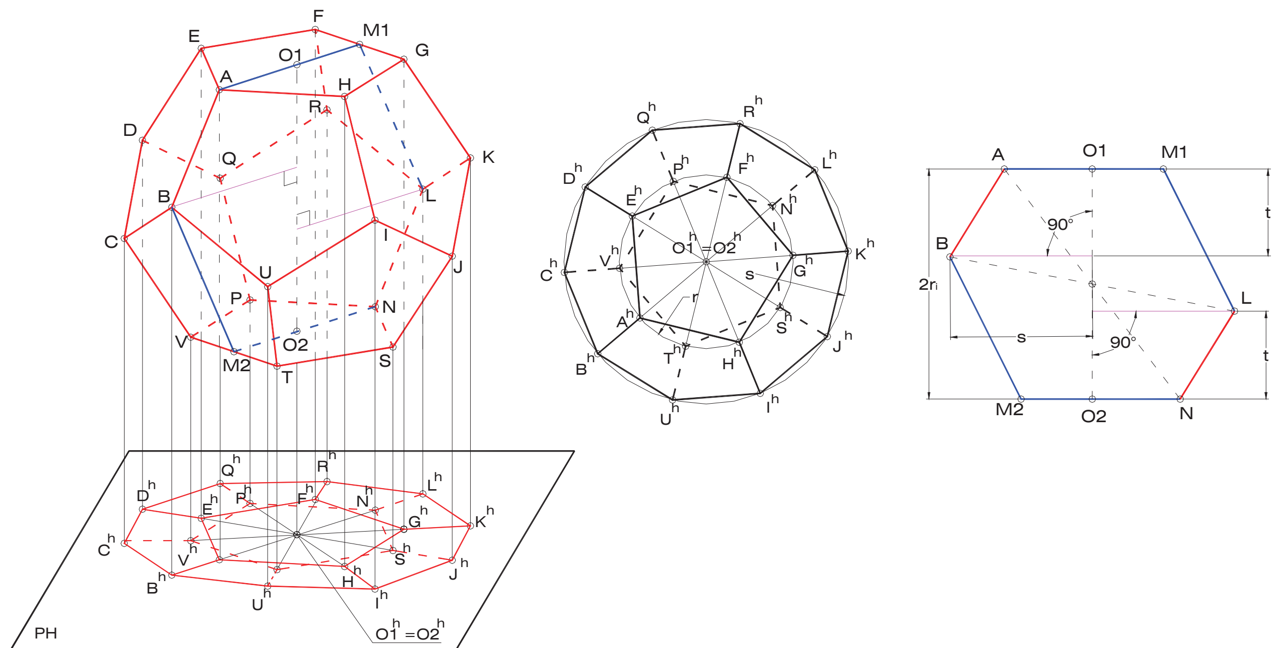


Fig. 4.30-a

En la parte derecha de la Fig. 4.30-a se ha representado una de las secciones principales perpendiculares a PH; analizando el polígono resulta evidente que la diferencia de altura entre las caras paralelas a PH es igual a la longitud del segmento O1O2, correspondiente al diámetro $2r_i$ de la esfera inscrita en el sólido. Por otra parte, los demás vértices del dodecaedro se encuentran en dos niveles de altura: los vértices C, Q, L, J y U se hallan a una distancia "t" por encima de la cara NSTVP, en tanto que los vértices B, D, R, K e I se ubican a la misma distancia "t" por debajo de la cara AEFGH.

2) Con una arista perpendicular al plano de proyección (Fig. 4.30-b)
En la figura se muestra la perspectiva de un dodecaedro con una de sus aristas, y por lo tanto su opuesta, perpendicular al plano de proyección horizontal. La sección principal del sólido que contiene a estas aristas – FR y TU en la figura - resulta ser perpendicular a PH, en tanto que la sección principal del poliedro que pasa por sus puntos medios M1 y M2 y por las aristas CD y JK es paralela a ese plano; el contorno de la proyección del dodecaedro corresponde, en consecuencia, a la proyección de esta sección.

Existe otra sección principal perpendicular a PH, la cual pasa por las aristas AH y PN, siendo éstas últimas, además, paralelas a PH. La diferencia de altura existente entre este par de aristas es igual al diámetro $2r_t$ de la esfera inscrita en el sólido. En la parte derecha de la Fig. 4.30-b se ha realizado el trazado de esta sección en verdadero tamaño.

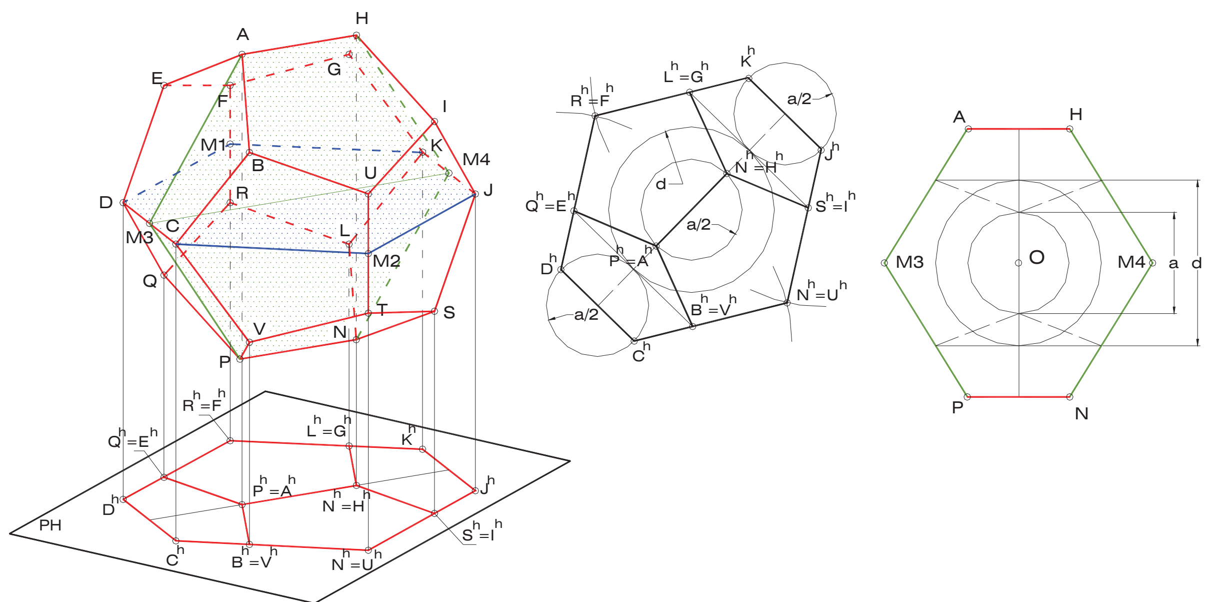


Fig. 4.30-b

Las aristas CD y JK se hallan en un plano intermedio paralelo a PH, el cual dista r_t de los vértices más altos (A y H) y de los más bajos (P y N). Por otro lado, los vértices B, E, G e I se encuentran en un plano paralelo a PH situado a una distancia igual a la mitad de la diagonal de cara “d” por encima del plano intermedio, en tanto que V, Q, L y S se sitúan a esa misma distancia por debajo de dicho plano. Finalmente, la diferencia de altura entre U y F por una parte y R y T por otra, y el plano intermedio, es igual a la mitad de la longitud de las aristas “a” del poliedro.

3) Con una diagonal perpendicular al plano de proyección (Fig. 4.30-c)
Sea la diagonal AN un segmento de recta perpendicular al plano horizontal de proyección. En esta posición, tres secciones principales del dodecaedro, aquellas que contienen a la diagonal en cuestión, resultan ser perpendiculares a PH. El contorno de la proyección horizontal del dodecaedro es un dodecágono irregular, el cual tiene dos grupos de lados iguales alternados. Es imprescindible construir una sección principal del sólido antes de determinar la proyección; en la parte derecha de la Fig. 4.30-c se ha representado una de las secciones principales que pasan por la diagonal AN.

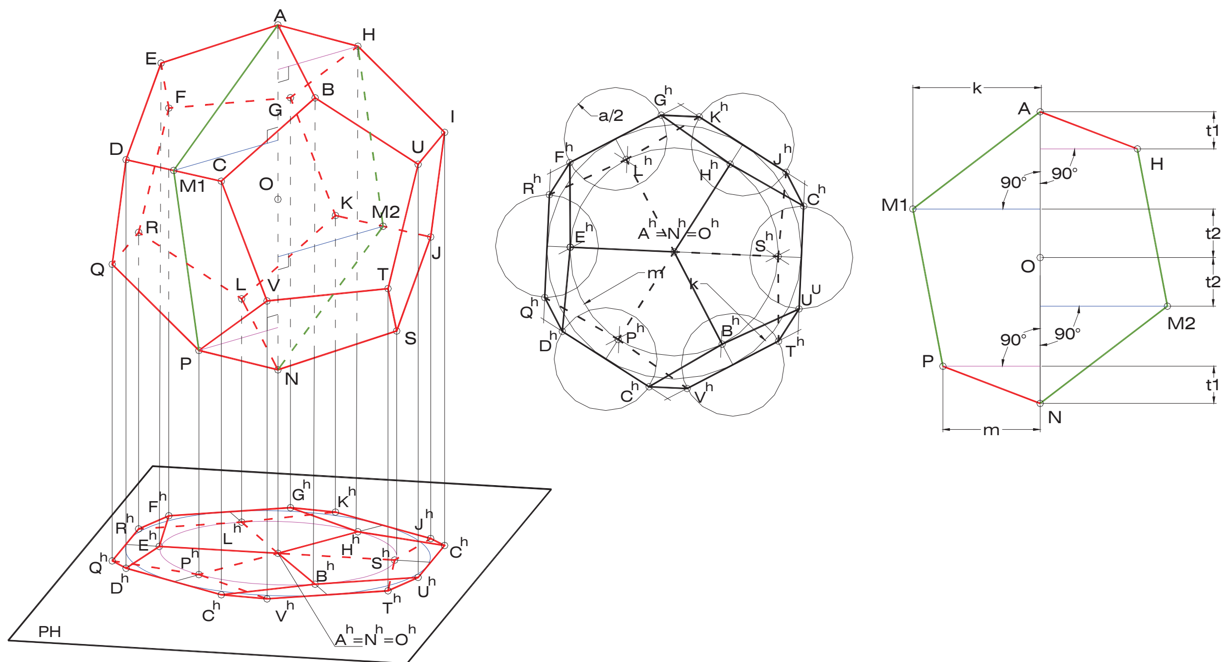


Fig. 4.30-c

El primer paso para dibujar la proyección del sólido consiste en dibujar una circunferencia de centro en la proyección de los puntos A y N y de radio “m” igual a la menor distancia entre el vértice P – o también H - y la diagonal AN. Sobre dicha circunferencia se encuentran las proyecciones de los vértices próximos al más alto (A), es decir, E, B y H, y de manera análoga, los tres próximos al más bajo (N), es decir, P, L y S; las proyecciones de los seis puntos señalados son los vértices de un hexágono regular.

Luego, se construye otra circunferencia concéntrica con respecto a la anterior y de radio “k”, menor distancia entre el punto medio M1 de la arista CD – o también M2, punto medio de la arista JK – y la diagonal AN. Extendiendo las líneas que parten de la proyección de la diagonal AN y pasan por las proyecciones de los vértices E, B, H, P, L y S, se obtienen, en el corte con la segunda circunferencia, las proyecciones de los puntos medios de tres aristas superiores (CD, FG e IU) y tres inferiores (QR, JK y VT) que son, al mismo tiempo, los puntos de tangencia entre la segunda circunferencia y las proyecciones de dichas aristas.

Por último, se construyen circunferencias de centro en los puntos de tangencia arriba señalados y radio igual a la mitad de la longitud de las aristas del sólido, las cuales cortan a las tangentes en los puntos C^h, D^h, F^h, G^h, I^h, U^h, Q^h, R^h, J^h, K^h, V^h y T^h .

Resulta evidente que la diferencia de altura entre el punto más alto y el más bajo es igual a la longitud de la diagonal del sólido. Por otra parte, la diferencia de altura entre los tres vértices próximos al más alto y éste último es igual a “t1”, Análogamente, esa misma

distancia es igual a la diferencia de altura entre el vértice más bajo y los tres próximos a él. Los vértices restantes se agrupan en dos conjuntos por encima y por debajo del centro O del dodecaedro, a una distancia "t2" de éste.

4) Posición accidental con respecto al plano de proyección (Fig. 4.30-d)

En aquellas situaciones en las cuales no se cumple algunas de las condiciones anteriores referentes a la posición relativa del dodecaedro con respecto a determinado plano de proyección, se dice que el sólido se encuentra en una posición accidental o aleatoria, siendo el contorno de la proyección correspondiente un polígono irregular.

No existen, por lo tanto, peculiaridades en la proyección en lo que respecta a las formas y tamaños, ni en cuanto a las distancias entre los vértices y el plano de proyección.

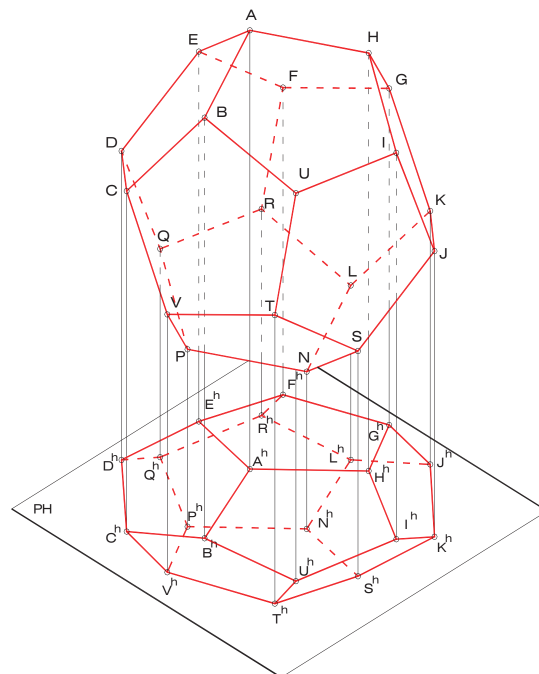


Fig. 4.30-d

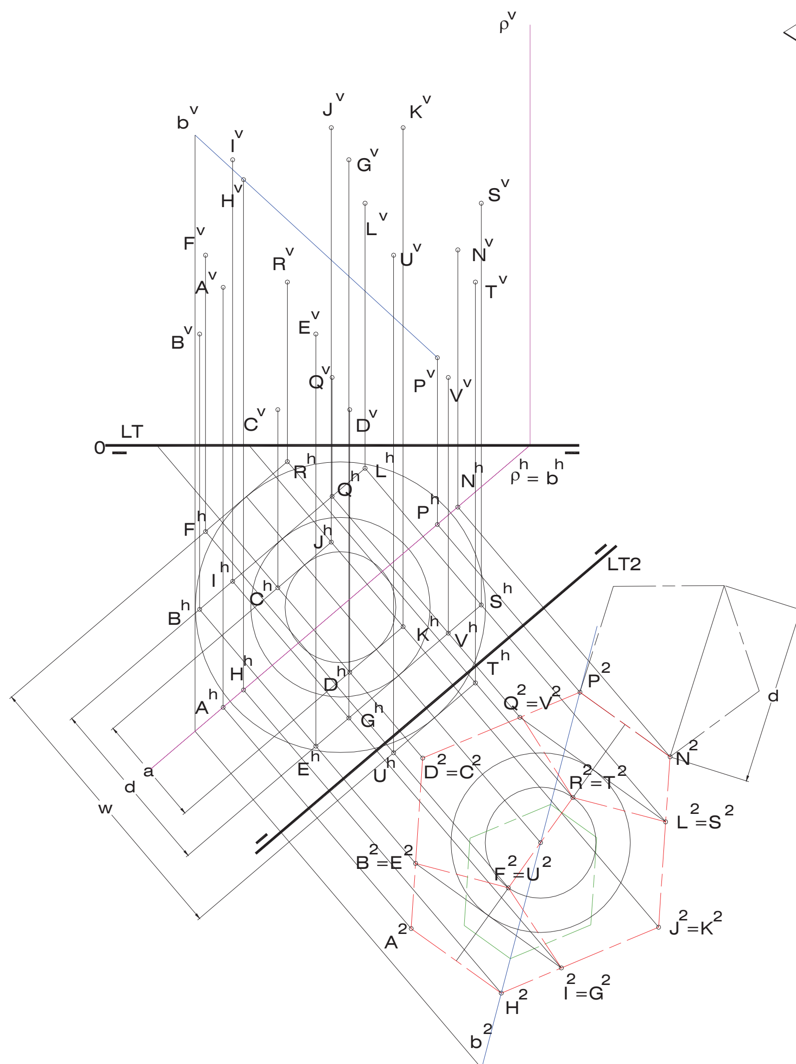


Fig. 4.31-a

El siguiente ejemplo ilustra el proceso de construcción de la doble proyección ortogonal de un dodecaedro en posición accidental con respecto a ambos planos de proyección del sistema. Los datos iniciales son el punto A, vértice del poliedro, y la recta "b" sobre la cual se encuentra la diagonal HP del sólido.

El plano ρ que determinan el punto A y la recta "b" es proyectante vertical, de manera que, mediante la introducción de un nuevo plano de proyección vertical, es posible generar un sistema de representación LT2, en el cual el dodecaedro adopta una posición notable, ya que dicho plano auxiliar se debe construir paralelo al plano ρ (Fig. 4.31-a).

Para determinar las dimensiones del poliedro es necesario construir una sección principal auxiliar correspondiente a un dodecaedro de longitud de arista "a'" (Fig. 4.31-b). Posteriormente, se procede a copiar dicha sección haciendo coincidir una de sus diagonales principales con la proyección auxiliar b^2 de la recta "b", para luego dibujar, aplicando semejanza de polígonos, la sección principal del sólido pedido contenida en el plano ρ.

De acuerdo con lo visto en el punto N° 2 de este tema, es posible precisar las proyecciones auxiliares de todos y cada uno de los vértices del dodecaedro, dado que sobre el plano auxiliar el poliedro se proyecta según una de sus secciones principales. Luego, para encontrar las proyecciones horizontales de dichos vértices bastará con recordar que N, H y P se encuentran sobre el plano ρ, en tanto que los restantes se agrupan en seis planos paralelos a ρ distribuidos de la siguiente forma: los más cercanos a ρ (C y J de un lado y D y K del otro) a una distancia a/2 de éste plano; los siguientes (B, I, Q y L de un lado y E, G, V y S del otro) a una distancia d/2 – mitad de la diagonal de cara - del mismo plano ρ; los restantes (F y R de un lado y U y T del otro) distan w/2 – radio de la esfera tangente a las aristas – del plano de sección principal ρ.

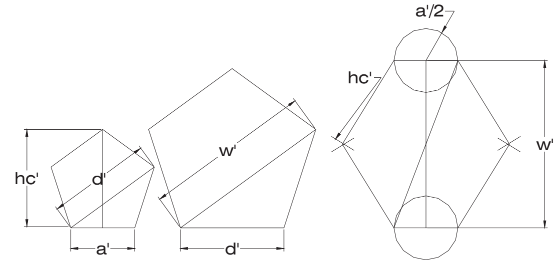


Fig. 4.31-b

La determinación de las proyecciones verticales de los vértices del dodecaedro consiste en copiar las cotas de tales puntos en el sistema LT2 (distancias desde LT2 a las proyecciones auxiliares) al sistema original LT.

Por último, la unión lógica y ordenada de los vértices en ambas proyecciones de manera simultánea, formando pentágonos y recordando que en cada vértice convergen tres aristas, resulta en las proyecciones del poliedro propiamente dicho, sin olvidar el correspondiente análisis de visibilidad, el cual se realiza aplicando los criterios empleados en los ejemplos anteriores (Fig. 4.31-c).

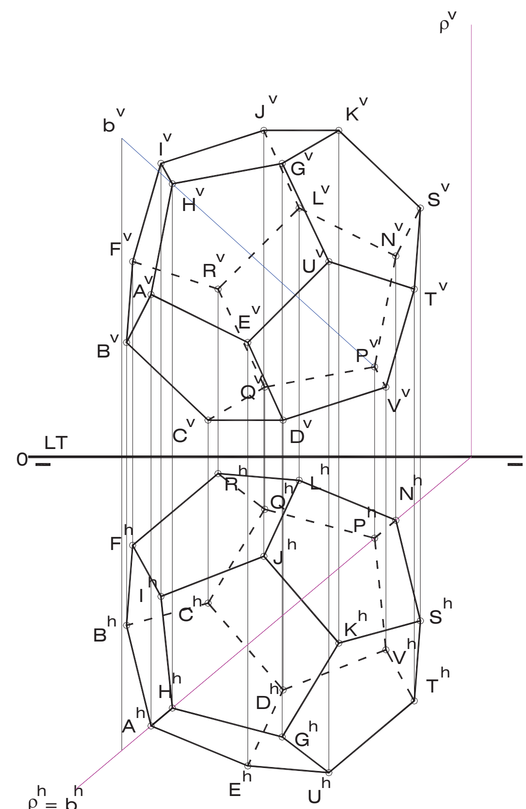


Fig. 4.31-c

4.5.6 El Icosaedro

El icosaedro es el poliedro regular constituido por veinte caras triangulares equiláteras, treinta aristas – al igual que el dodecaedro – y doce vértices. Dos aristas opuestas del poliedro son paralelas entre sí, determinando un plano de sección principal; las caras opuestas del sólido son también paralelas.

Las secciones principales del icosaedro - las cuales existen en un número de quince: una por cada par de aristas opuestas – son hexágonos irregulares (Fig. 4.32-a y Fig. 4.32-b)), dos de cuyos lados corresponden a aristas opuestas (BC y KL) de longitud “a”, en tanto que los cuatro restantes son alturas de cara “hc”. La diagonal menor de cada uno de dichos hexágonos tiene por longitud la diagonal “w” de un pentágono de lado igual a la arista del sólido, longitud ésta que es también la que separa a las dos aristas opuestas de la sección. Por otra parte, las otras dos diagonales corresponden a dos diagonales principales del sólido (CL y BK) de longitud “d”, cuyos extremos son dos vértices diametralmente opuestos.

El centro de la sección principal – corte de las diagonales – es el centro O del icosaedro. La distancia entre este punto y uno de los vértices es el radio r_c de la esfera circunscrita al sólido; la distancia entre O y el punto medio de una de las aristas – igual a w/2 - es el radio r_t de la esfera tangente a éstas; la menor distancia entre O y cualquiera de las alturas de cara corresponde al radio r_i de la esfera inscrita en el poliedro. El ángulo ψ formado entre las alturas de cara es igual al formado entre dos caras adyacentes del icosaedro.

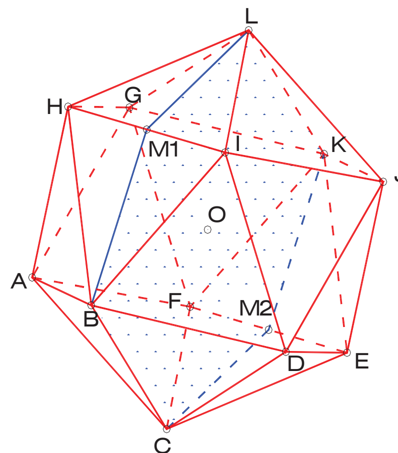


Fig. 4.32-a

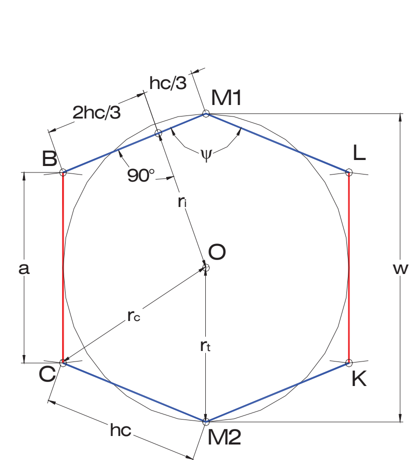


Fig. 4.32-b

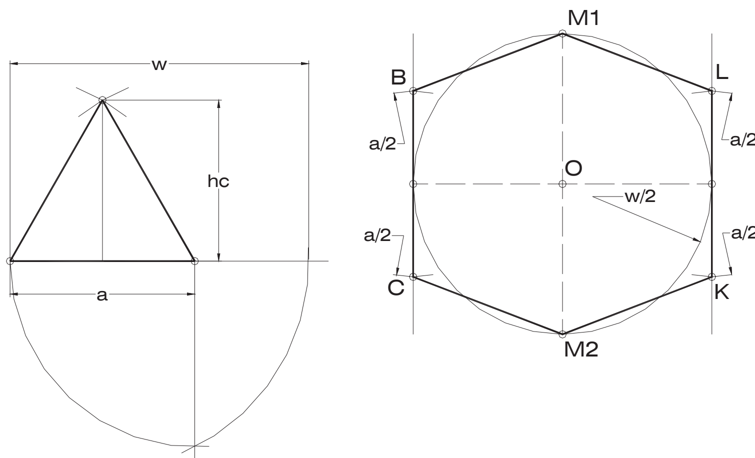


Fig. 4.32-c

La Fig. 4.32-c muestra el trazado de la sección principal de un icosaedro, partiendo de una de sus aristas “a”. En primer lugar, se construye un triángulo equilátero de lado “a” y se determina su altura “hc”. Luego, se halla la diagonal “w” de un pentágono de lado igual al del triángulo, aplicando parte del método de construcción de pentágono regular a partir de uno de sus lados. Posteriormente, se dibuja una circunferencia de radio w/2 y se trazan dos tangentes a ella por los extremos de uno de sus diámetros, para luego consignar sobre dichas tangentes, a cada lado del respectivo punto de tangencia, la longitud a/2, obteniéndose así los vértices B, C, L y M. Finalmente, se unen los extremos M1 y M2 del diámetro paralelo a las tangentes con los extremos de las aristas, dando lugar a las cuatro alturas de cara de la sección principal.

Considérese un plano perpendicular a una de las diagonales del icosaedro – EH en la Fig. 4.33-a – que pasa por uno de los vértices; la sección producida por dicho plano es un pentágono regular de lados iguales a las aristas de cinco caras convergentes en uno de los extremos (H) de la diagonal en cuestión.

Si se construye un plano perpendicular a una de las diagonales – EH en la Fig. 4.33-b – que pase por el centro del icosaedro, se genera una *sección decagonal regular*, cuyos vértices son puntos medios de aristas.

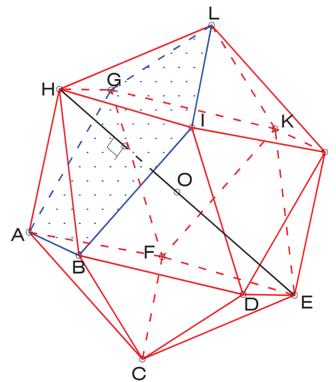


Fig. 4.33-a

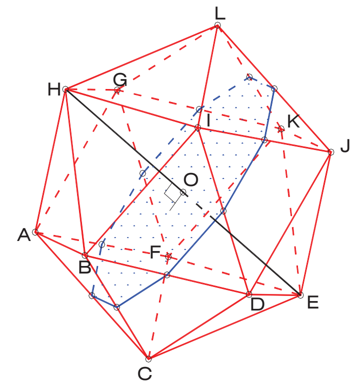


Fig. 4.33-b

4.5.6.1 Proyección cilíndrica ortogonal del icosaedro

1) Con una cara paralela al plano de proyección (Fig. 4.34-a)
Si una de las caras del icosaedro – CEF en la figura – es paralela al plano de proyección, también lo será la cara opuesta – HIL en la figura - y, en consecuencia, la proyección de ambas caras sobre el plano considerado corresponde a dos triángulos equiláteros concéntricos e invertidos, inscritos en una circunferencia de radio igual a la que circunscribe a una de las caras del poliedro. La longitud de los lados de estos triángulos no es otra que la de las aristas del sólido “a”.

Los vértices restantes se proyectan sobre una circunferencia de igual centro que la anterior y de radio “s”, menor distancia que separa a uno de los vértices - B o K en la sección resaltada en la figura - de una de las secciones principales perpendiculares a PH de la línea definida, en esa misma sección, por dos centros de caras opuestas (O1 y O2). De esta manera el contorno de la proyección del icosaedro queda determinado, constituyendo un hexágono regular. Para conocer la altura de los vértices del poliedro basta con dibujar una de las secciones perpendiculares al plano de proyección, como la mostrada en la parte derecha de la Fig. 4.34-a.

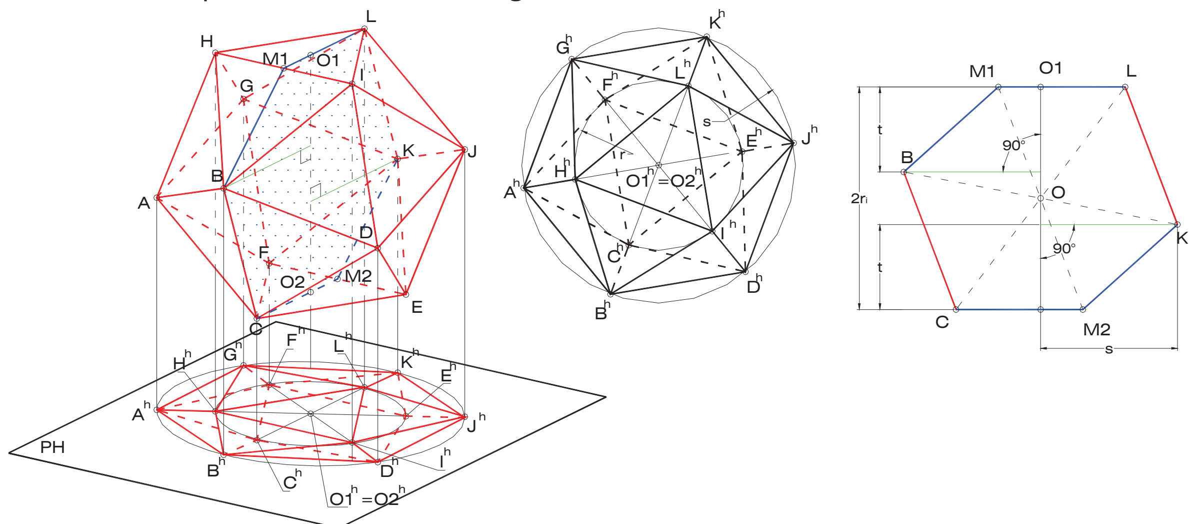


Fig. 4.34-a

La diferencia de altura entre las caras paralelas al plano considerado, es decir, la más alta y al más baja, es igual al diámetro 2ri de la esfera inscrita en el sólido. Los demás vértices se sitúan en dos niveles de altura respecto de PH: los más cercanos a la cara

más alta (B, G y J) se encuentran a una distancia "t" por debajo de ésta, en tanto que los vértices más cercanos a la cara más baja (A, D y K) se hallan a una distancia "t" por encima de ella.

2) Con una arista perpendicular al plano de proyección (Fig. 4.34-b)
Si una de las aristas del icosaedro, y por consiguiente su opuesta, resulta ser perpendicular a un determinado plano de proyección – el horizontal en el ejemplo - ocurre que la sección principal del sólido que contiene a estas aristas – BC y KL en la figura – es igualmente perpendicular a dicho plano. Por otra parte, la sección principal del poliedro que pasa por los puntos medios M1 y M2 de las aristas perpendiculares a PH y por las aristas AG y DJ es paralela a ese plano; el contorno de la proyección del icosaedro corresponde, en consecuencia, a la proyección de esta sección.

Los puntos A, B, C, E, G, J, K y L se proyectan en los vértices del contorno de la proyección del sólido, en tanto que E, F, H e I por ser extremos de aristas paralelas a PH se proyectan sobre una circunferencia de radio "a" y centro igual al del polígono que constituye el contorno de la proyección.

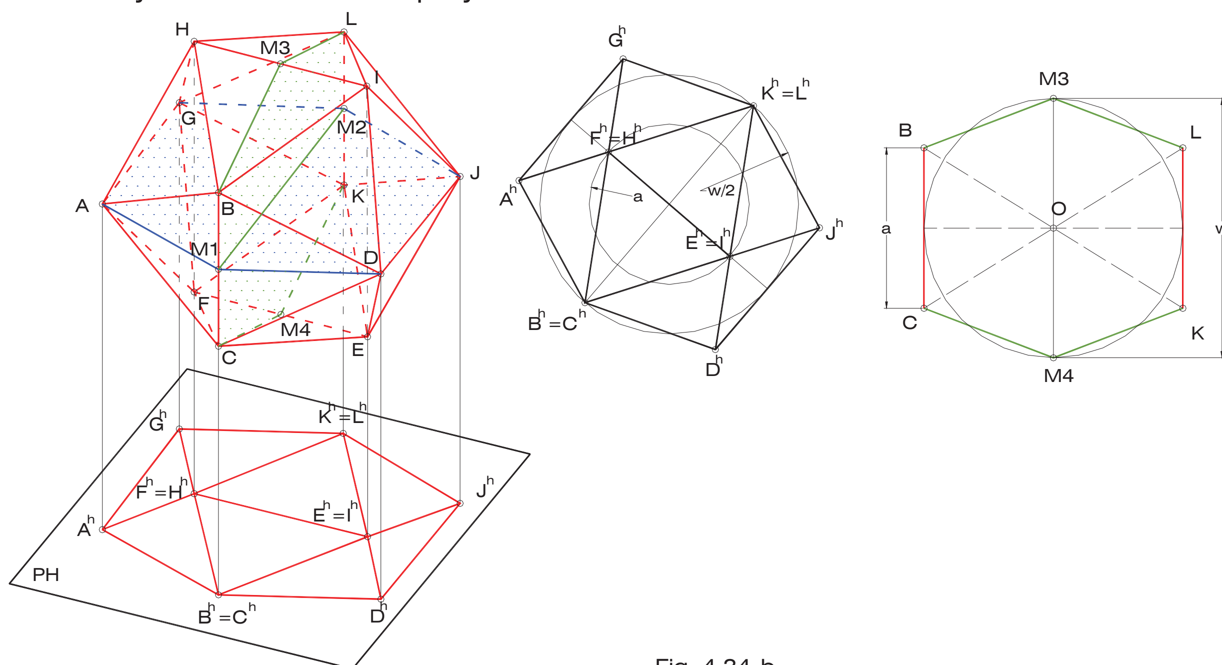


Fig. 4.34-b

La figura de la derecha muestra una sección principal del poliedro perpendicular al plano de proyección en verdadero tamaño, de cuyo análisis se desprende lo siguiente: la diferencia de altura existente entre las aristas paralelas a PH EF y HI es igual al diámetro $2r_t$ de la esfera tangente a las aristas del sólido, o lo que es lo mismo, a la diagonal "w" de un pentágono de lado igual a la arista del icosaedro; los vértices B y L, más cercanos a los más altos, se hallan sobre un plano paralelo a PH a un distancia a/2 por debajo de aquellos, mientras que los vértices C y K, se sitúan a igual distancia por encima de los más bajos. Por último, los vértices restantes A, D, G y J se ubican en un plano intermedio paralelo a PH que pasa por el centro del poliedro, es decir, a w/2 por encima de los más bajos y w/2 por debajo de los más altos.

3) Con una diagonal perpendicular al plano de proyección (Fig. 4.34-c)
Si una de las diagonales del sólido – la CL en la figura – es perpendicular a un plano de proyección determinado (PH), tres secciones principales del icosaedro, aquellas que

contienen a la diagonal referida, resultan ser perpendiculares al plano de proyección en cuestión.

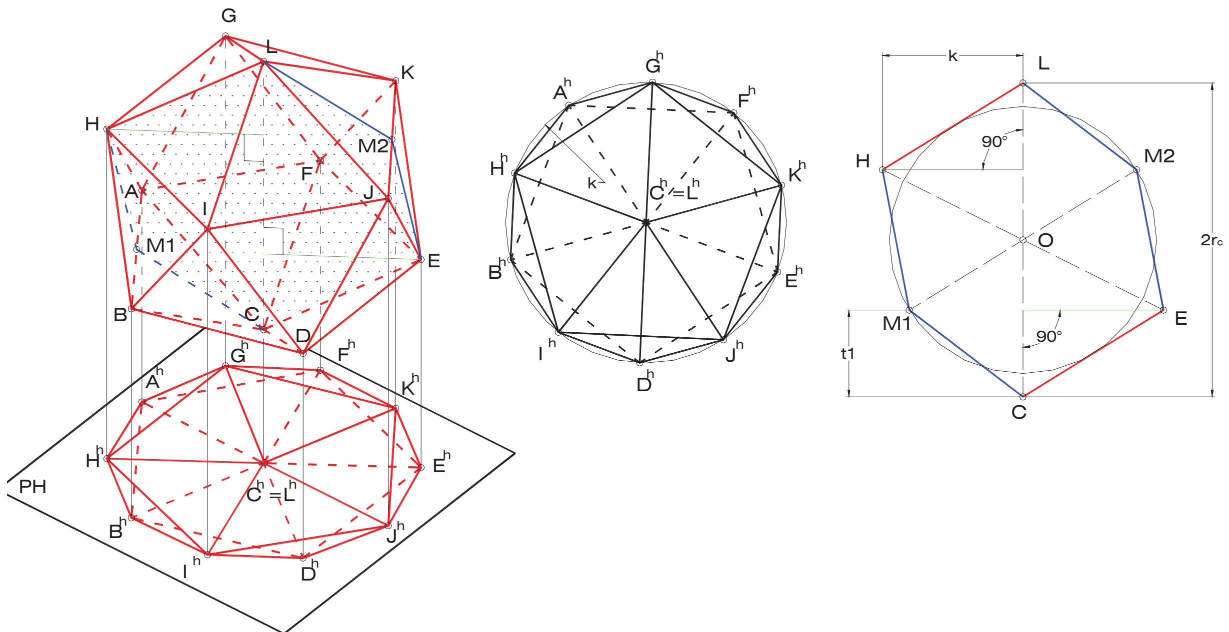


Fig. 4.34-c

El contorno de la proyección horizontal del poliedro es un decágono regular, inscrito en una circunferencia de radio “k”, valor éste correspondiente a la menor distancia entre uno de los vértices del icosaedro y la diagonal CL.

Los vértices extremos de la diagonal perpendicular a PH se proyectan confundidos en el centro del decágono.

Es imprescindible construir una sección principal del sólido antes de determinar la proyección; en la parte derecha de la Fig. 4.30-c se ha representado una de las secciones principales que pasan por la diagonal AN.

En la sección principal dibujada en la parte derecha de la Fig. 4.31-c se aprecia la forma de obtener la magnitud “k”, así como la distancia “t1” correspondiente a la diferencia de altura entre el vértice más bajo (C) y los cinco vértices más cercanos a él (A, B, D y F). De igual manera, la diferencia de altura entre el vértice más alto (L) y los cinco más cercanos a él (G, H, I, J y K) es igual a “t1”. Por otra parte, la diferencia de altura entre el vértice más alto y el más bajo es igual a al longitud de la diagonal que ellos definen, es decir, al diámetro $2r_c$ de la esfera circunscrita al sólido.

4) Posición accidental con respecto al plano de proyección (Fig. 4.34-d)

Existen infinitas posturas en las cuales no se presenta ninguna de las relaciones notables existentes en los casos anteriores entre el sólido y un determinado plano de proyección. Se dice, entonces, que el icosaedro se encuentra en posición accidental o aleatoria en relación al mencionado plano.

El contorno de la proyección correspondiente es siempre un polígono irregular y no existen características especiales en cuanto a las distancias entre los vértices del poliedro y el plano de proyección de referencia.

Considérese el siguiente problema: Sea AB una de las aristas de un icosaedro ABCDEFGHIJKL. Se sabe que la recta definida por el segmento AB es una de las rectas de máxima pendiente del plano σ, el cual contiene a la cara ABC del poliedro. Además, se debe tomar la solución de menor vuelo para el vértice C y la solución de menor cota para el resto del sólido.

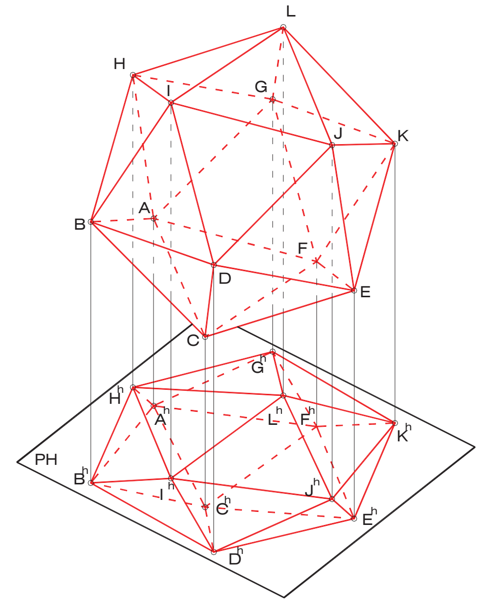


Fig. 4.34-d

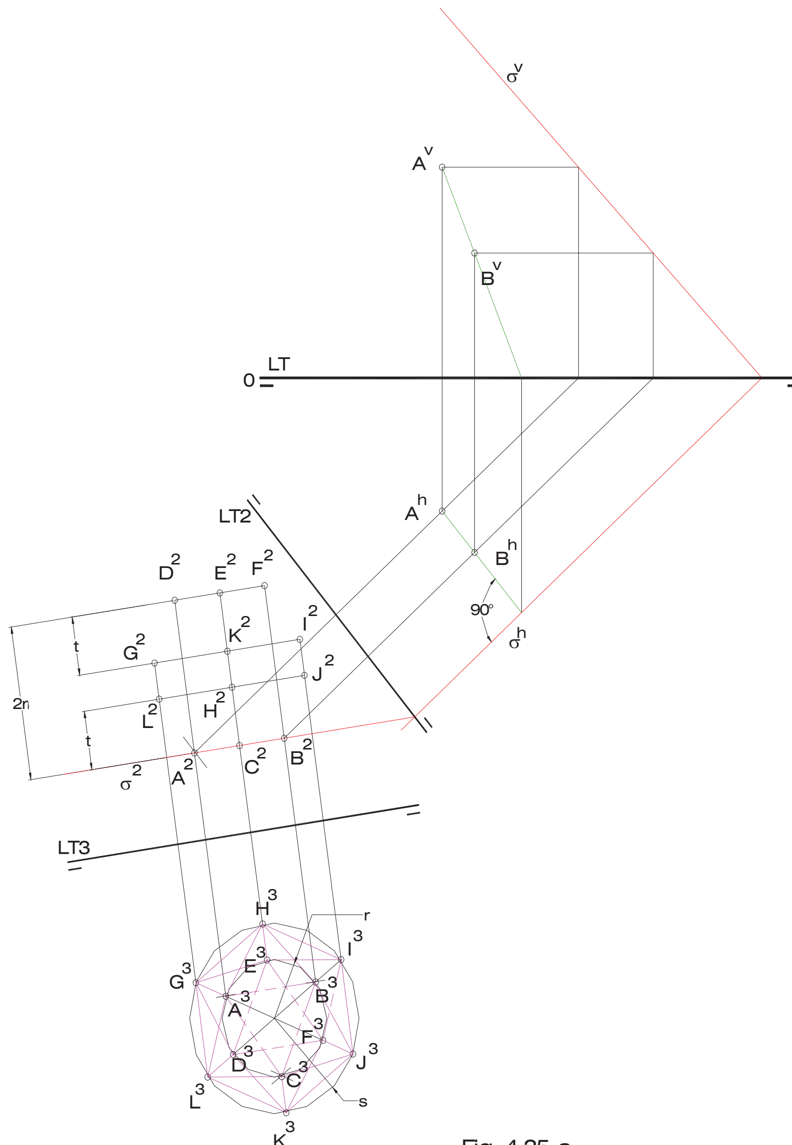


Fig. 4.35-a

El paso inicial consiste en la determinación de las trazas del plano σ, sabiendo que σ^h es perpendicular a la proyección horizontal de la recta AB, al igual que las proyecciones horizontales de dos rectas horizontales del plano que pasan por los puntos A y B, cuyos puntos de traza vertical determinan la recta de traza vertical σ^v (Fig. 4.35-a).

Dada la facilidad que ofrece la construcción de las proyecciones del poliedro cuando éste se encuentra en posición notable en relación a un plano de proyección, resulta conveniente generar un nuevo sistema de proyección en el que se verifique una situación como la señalada. Para ello se

construye una línea de tierra LT2 perpendicular a la proyección horizontal de las rectas horizontales del plano σ y se determinan las proyecciones auxiliares A^2 y B^2, recordando que la cota de los puntos es igual en los sistemas LT y LT2; de esta forma se logra que el plano σ sea proyectante vertical en el sistema LT2. Luego, es necesario trazar una tercera línea de tierra (LT3) en forma paralela a la traza σ^2, definida por las proyecciones auxiliares A^2 y B^2 de los puntos A y B, hallando a continuación las proyecciones auxiliares A^3 y B^3, recordando que el vuelo de los puntos es igual en los sistemas LT2 y LT32.

Para obtener las dimensiones necesarias para la construcción de las proyecciones auxiliares del sólido (2ri, t, r) es preciso dibujar la sección principal del icosaedro en verdadera magnitud, lo cual se ha realizado aparte en la Fig. 4.35-b partiendo de la longitud "a" de las aristas, longitud ésta que se ha tomado de la proyección A^2B^2 del segmento AB.

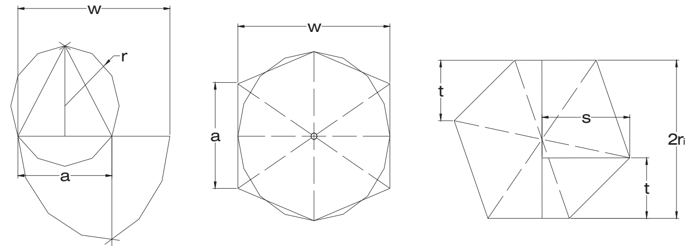


Fig. 4.35-b

En vista de que el plano σ es horizontal en el sistema LT3, el icosaedro posición notable, con una cara paralela al plano de proyección horizontal del mencionado sistema, por lo que la construcción de sus proyecciones auxiliares se realiza de acuerdo con lo expuesto en el numeral dos de esta sección (Pág. 111).

Una vez halladas las proyecciones auxiliares de todos y cada uno de los vértices del icosaedro, se procede a encontrar la proyección horizontal sabiendo que la distancia entre las segundas proyecciones auxiliares y LT3, es decir, el vuelo de los vértices en el sistema LT3, es igual a la distancia entre las proyecciones horizontales y LT2 (Fig. 4.35-c).

La determinación de las proyecciones verticales de los vértices del sólido consiste en copiar las distancias entre LT2 y las primeras proyecciones auxiliares, es decir, la cota de los vértices en el sistema LT2, a partir de la línea de tierra original y sobre las correspondientes referencias (Fig. 4.35-c).

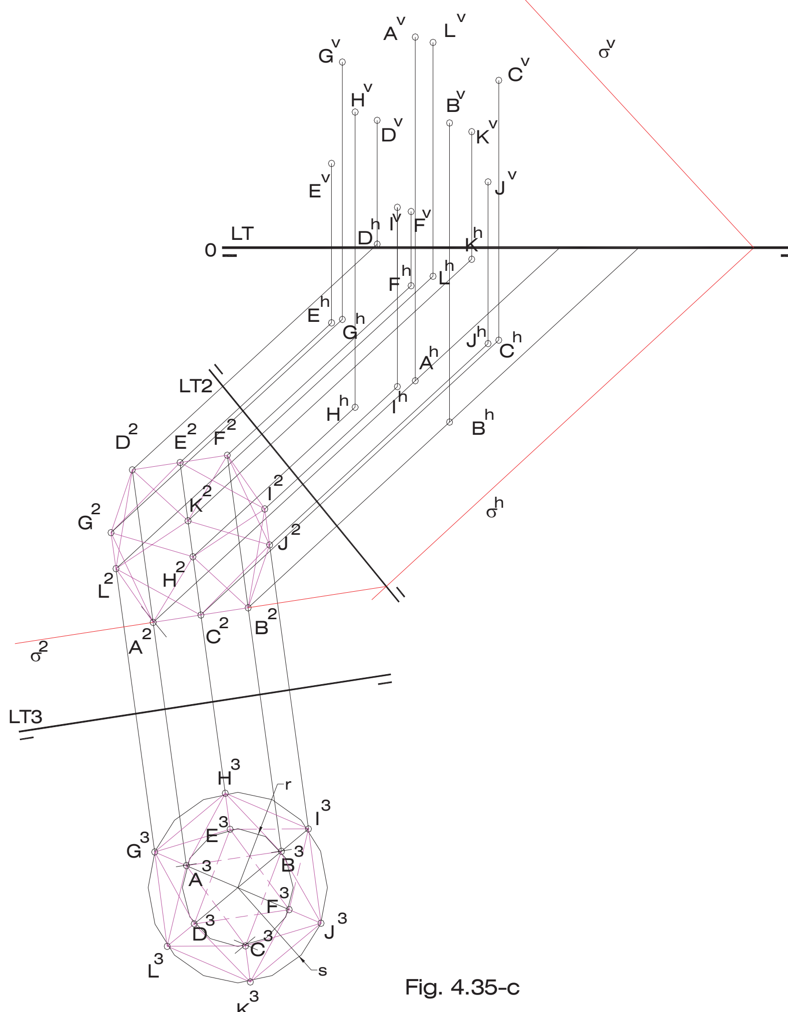


Fig. 4.35-c

Por último, se unen las proyecciones homónimas de los vértices de forma simultánea para evitar confusiones, formando triángulos y recordando que en un vértice deben converger cinco aristas. No debe pasarse por alto el correspondiente análisis de la visibilidad, para lo cual se aplica el conocido criterio de cota y vuelo de los elementos (Fig. 4.35-d).

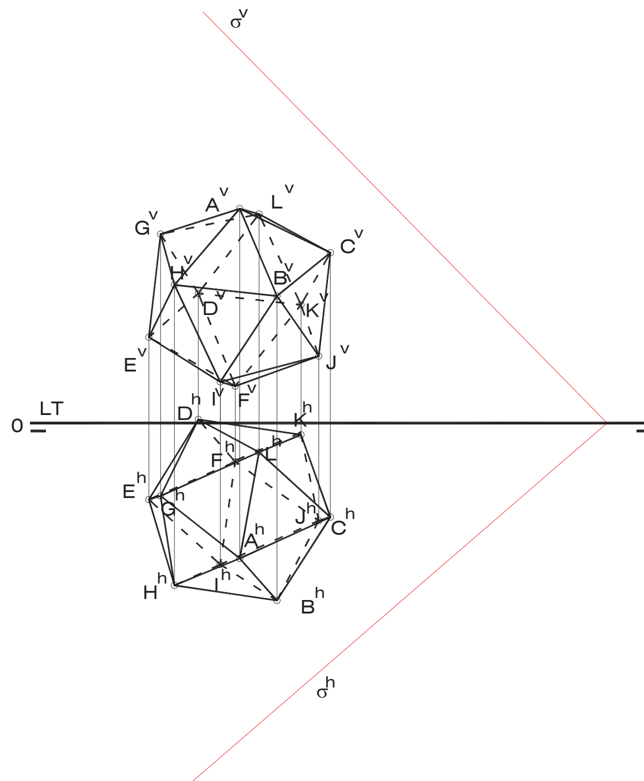


Fig. 4.35-d

CAPÍTULO V

5.1 Ejercicios resueltos de Punto y Recta

1) Determine las proyecciones diédricas de los siguientes segmentos de recta:

- AB: mide 25 mm y es perpendicular al plano horizontal de proyección. B más alto que A(10, 40, 15).
- BC: mide 60 mm y es paralela al plano horizontal de proyección. C se encuentra a la derecha de A y sobre el plano vertical.
- CD: mide 40 mm y forma 60° con el plano vertical de proyección. El punto D(??, ??, 40) está a la derecha de C y tiene mayor vuelo que éste.
- DE: es perpendicular al plano lateral de proyección.
- EF: forma 60° con el plano horizontal y 30° con el plano vertical de proyección. El punto F(90, ??, 00) es de menor vuelo que el punto E.

Solución (Fig. 5.1)

En primer lugar es necesario hallar las proyecciones del punto A, para lo cual se miden 10 milímetros sobre la línea de tierra, a partir del punto marcado como origen de coordenadas y hacia la derecha, trazando luego una referencia perpendicular a dicha línea sobre la cual se miden los valores de las coordenadas Y y Z del punto A. En vista de que tales valores son positivos en el ejemplo, el vuelo (Y) de A debe ser medido por debajo de la línea de tierra, en tanto que la cota (Z) de dicho punto se ha de medir por encima de ella; el resultado es las proyecciones diédricas A^h (iconografía) y A^v (ortografía) del punto A.

El segmento AB es perpendicular al plano horizontal, es decir, se halla en posición *de pié* por lo que la proyección horizontal del punto B – así como la de cualquier otro punto perteneciente a la recta definida por el segmento AB – se confunde pon la proyección horizontal de A. Por otra parte, la proyección vertical del segmento AB es otro segmento A^vB^v perpendicular a la línea de tierra, cuya longitud es igual a la del segmento AB, ya que éste se proyecta en verdadero tamaño sobre el plano vertical por ser paralelo a él.

En vista de que el segmento de recta BC es paralelo al plano horizontal de proyección y de que el punto C se encuentra sobre el plano vertical y a la derecha de A, se concluye que su posición es *horizontal*, por lo que la proyección sobre PH se halla en verdadero tamaño. Así, haciendo centro en B^h y con radio igual al tamaño del segmento BC (60 mm) se traza un arco que corta a la línea de tierra en un punto que constituye la proyección horizontal C^h del punto C, pues todo punto perteneciente a PV se proyecta sobre PH en la línea de tierra. La proyección vertical del segmento BC es un segmento paralelo a la línea de tierra; C^v se halla en el corte entre éste y una referencia vertical trazada por C^h.

El segmento de recta CD se encuentra en posición *horizontal*. Esto se desprende de dos circunstancias específicas: en primer lugar, la cota del punto D es igual a la del punto C (40 mm) y , segundo, la recta forma un ángulo distinto de cero y de 90° con el plano vertical. La proyección horizontal de CD se traza por C^h formando un ángulo de 60° con la línea de tierra hacia la derecha de C y en la dirección de mayor vuelo con una longitud de 40 mm, dando lugar a la proyección horizontal de D. Al igual que en el segmento BC, la proyección vertical resulta paralela a la línea de tierra, con C^v sobre una referencia vertical trazada por D^h.

Es evidente que un segmento perpendicular al plano lateral es también *paralelo a la línea de tierra*. Tal es el caso del segmento DE en este ejemplo, cuyas proyecciones diédricas son segmentos también paralelos a la línea de tierra de una longitud desconocida. Sin embargo, se observa que el segmento EF está en posición *de perfil*, puesto que la suma de los valores de los ángulos que forma con PH y PV es igual a 90. Ello implica que la primera coordenada (X) de E es igual a al primera coordenada de F, resolviéndose así el problema al trazar una referencia perpendicular a la línea de tierra en X =90 mm, la cual corta a las proyecciones

diédricas de la recta paralela a la línea de tierra trazada por D generando las proyecciones E^h y E^v del punto E.

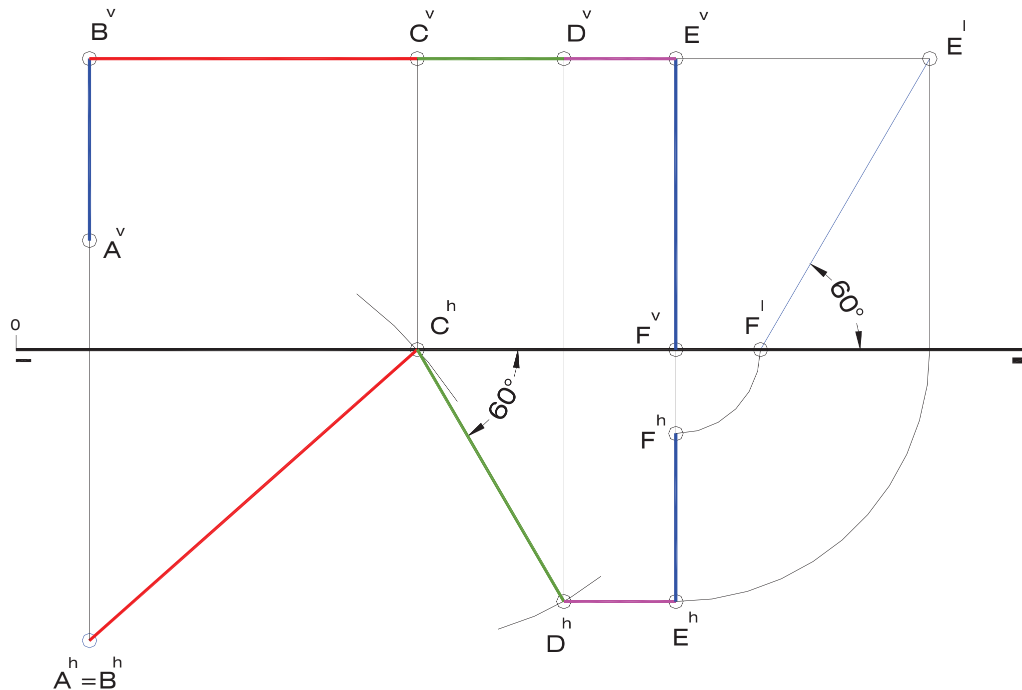


Fig. 5.1

Para definir al segmento EF es necesario realizar la proyección lateral del punto E con el fin de determinar la proyección lateral del segmento, ya que para ello se cuenta con los ángulos que forma EF con los planos de proyección PV y PH. De manera que se traza por E^l una línea que forme 60° con la horizontal (o 30° con la vertical) y a la izquierda, por ser F de menor vuelo que E. Como la cota del punto F es igual a cero, el corte entre la línea así trazada y la línea de tierra representa la proyección lateral del punto F. Finalmente, se hallan las proyecciones diédricas de F, recordando que F^v se encuentra sobre la línea de tierra.

2) Determine las proyecciones diédricas de los siguientes segmentos de recta:

- AB: frontal que mide 45 mm. B a la derecha de A(10, -15, -40) y de mayor cota.
- BC: paralela a ambos planos de proyección (PV y PH). C a la derecha de B. C(70, ??, ??).
- CD: perpendicular al plano vertical de proyección que mide 50 mm. D en la cuarta región (anterior-inferior).
- DE: de perfil que mide 80 mm y forma 45° con PH. E en la segunda región (posterior-superior).

Solución (Fig. 5.2)

Primero es necesario hallar las proyecciones del punto A, el cual se ubica en la tercera región (posterior-inferior) como se deduce al observar que los valores de vuelo y cota son negativos. En consecuencia, la proyección vertical de A se encuentra a 40 mm de la línea de tierra y por debajo de ésta, en tanto que la proyección vertical va a ubicarse a 15 mm de la mencionada línea y por arriba de ella.

Estando el segmento de recta AB en posición *frontal*, su verdadero tamaño se encuentra proyectado sobre el plano vertical, lo mismo que el ángulo α que forma con el horizontal. Por esta razón, se ha de trazar por A^v una línea recta que forme 45° con la línea de tierra y con una longitud de 45 mm, con lo cual se obtiene la proyección vertical del extremo B, a la derecha y con mayor cota que A. Es necesario aclarar que si bien el valor absoluto de la cota de A es mayor que el valor absoluto de la cota de B, en términos relativos la cota de éste último punto es mayor que la de aquél, dado que se encuentra más *alto* en la dirección del eje Z.

El siguiente segmento es paralelo a los planos de proyección PV y PH, es decir, paralelo a la línea de tierra. No es necesario conocer su longitud puesto que el problema ofrece como un dato el valor de la primera coordenada del extremo C. Así pues, se deben trazar paralelas a la línea de tierra por las proyecciones diédricas del punto B, las cuales cortan a una referencia perpendicular a dicha línea - trazada en X =70 mm - en las proyecciones C^v y C^v del punto C. Nótese que los segmentos AB y BC se encuentran por entero en la tercera región del espacio.

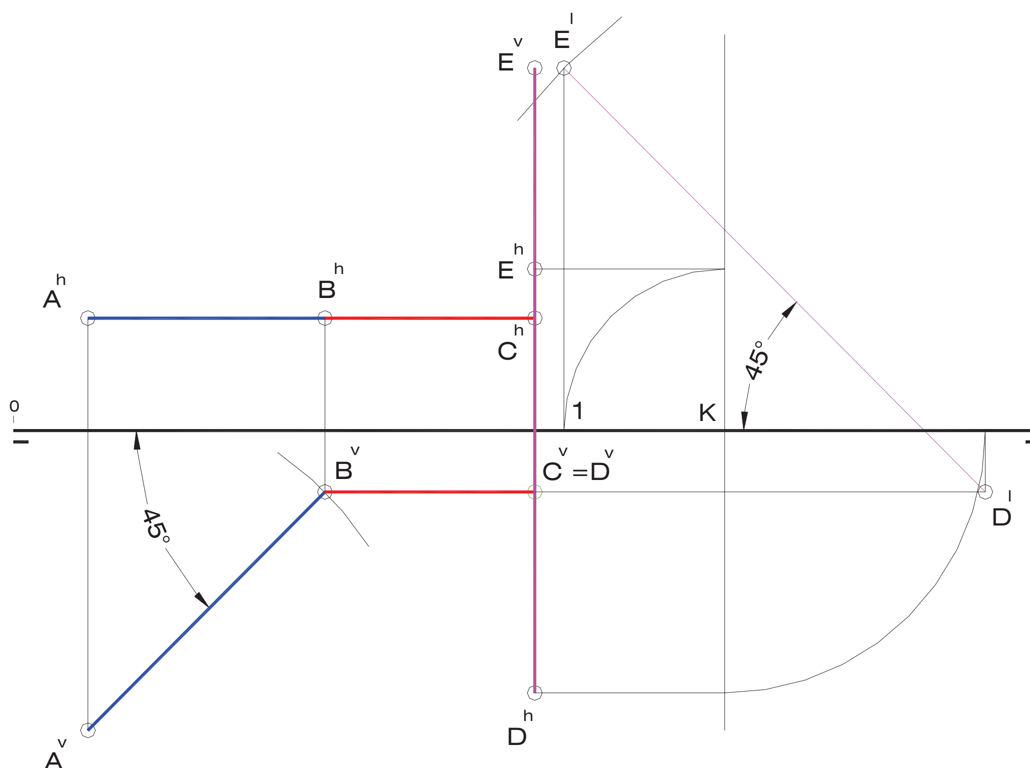


Fig. 5.2

Para construir la proyección horizontal de CD, el cual se encuentra en posición *de punta*, se debe trazar por C^h una perpendicular a la línea de tierra con una longitud de 50 mm. De las dos soluciones posibles (con mayor vuelo que C o con menor vuelo que C) debe tomarse aquella que satisfaga la condición del problema, es decir, que de como resultado al punto D en la cuarta región; dicha solución es la de mayor vuelo. La obtención de la proyección vertical de D no reviste mayor dificultad, dado que se confunde con la proyección vertical del punto C.

El segmento de recta DE es de perfil, lo que implica que su verdadero tamaño y los ángulos que forma con PV y PH deben de ubicarse en la proyección lateral. Para ello se ha trazado una línea perpendicular a la línea de tierra a una distancia arbitraria a la derecha de las

proyecciones de D que representa al plano lateral en proyecciones diédricas. La proyección lateral de D debe estar por debajo de la línea de tierra por ser un punto de la cuarta región del espacio (cota negativa). A continuación, se traza una línea recta que forme 45° (valor del ángulo formado entre el segmento y el plano horizontal de proyección) con la línea de tierra y con una longitud de 80 mm, la cual constituye la proyección lateral del segmento DE. De las cuatro soluciones posibles se escoge aquella que arroja como resultado al punto E en la segunda región (por encima de PH y por detrás de PV), es decir, la solución de mayor cota y menor vuelo que D.

La proyección vertical de E se halla trazando por E^l una paralela a la línea de tierra que corte a la línea de referencia del punto D; recuérdese que todos los puntos de una recta de perfil tienen igual coordenada X. La proyección vertical E^v se determina de la siguiente manera: trazar por E^l una perpendicular a la línea de tierra que la corta en 1, luego dibujar un cuarto de circunferencia de centro en K, punto de corte entre la representación diédrica del plano lateral y la línea de tierra, y radio K1; la solución correcta para este arco es la dibujada por encima de la línea de tierra, al igual que la proyección vertical de E (punto de la segunda región). Finalmente debe trazarse una paralela a LT por el extremo del arco, la cual cortará a la línea de referencia del punto D en E^h .

3) Halle las trazas de las rectas definidas por los siguientes segmentos

$$a\begin{Bmatrix} 1(00,50,30) \\ 2(40,-10,-40) \end{Bmatrix} \quad b\begin{Bmatrix} 3(20,-10,-30) \\ 4(50,-50,-05) \end{Bmatrix} \quad c\begin{Bmatrix} 5(10,10,20) \\ 6(10,40,35) \end{Bmatrix}$$

Determine el verdadero tamaño y los ángulos α y β del segmento 12 aplicando giro.
Determine el verdadero tamaño y los ángulos α y β del segmento 34 aplicando abatimiento.

Solución (Fig. 5.3)

Una vez representadas las proyecciones diédricas de cada uno de los segmentos, es posible establecer la posición relativa de cada uno ellos con respecto a los planos de proyección PV y PH. El segmento 12 pertenece a una recta oblicua “a” descendente hacia delante; el segmento 34 define una recta oblicua “b” ascendente hacia delante; finalmente, el segmento 56 se halla en posición de perfil.

El punto de traza horizontal TH de una recta es el punto común a ésta y al plano horizontal de proyección, por lo que la proyección vertical TH^v de ese punto se encuentra en el corte entre la proyección vertical de la recta y la línea de tierra. Basta luego con trazar por TH^v una referencia perpendicular a LT que corta a la proyección horizontal de la recta en TH^h, proyección horizontal del punto de traza horizontal. Análogamente, el punto común a la proyección horizontal de la recta y a LT es la proyección horizontal TV^h del punto de traza vertical TV, dado que éste tiene vuelo igual a cero. Finalmente, el corte entre una referencia perpendicular a LT trazada por TV^h y la proyección vertical de la recta constituye la proyección ortográfica del punto TV. Este es el procedimiento seguido para determinar los puntos de traza de las rectas “a” y “b” (Fig. 5.3-a y Fig. 5.3-b).

Para determinar el verdadero tamaño y los ángulos α y β del segmento 12 (Fig. 5.3-a) es necesario aplicar dos giros: uno en torno a un eje de punta y otro en torno a un eje de pié; para mayor simplicidad se ha asumido que ambos ejes pasan por el punto 1. En la primera operación, la proyección vertical de 2 describe un movimiento circular hasta ubicarse a igual distancia de LT que la proyección vertical del punto 1, dando lugar a $2'^v$. La proyección horizontal del punto 2’ (punto 2 luego del giro) se obtiene en el corte entre una referencia perpendicular a LT trazada por $2'^v$ y una paralela a LT trazada por 2^h, debido a que la proyección horizontal de 2 realiza un movimiento lineal en la dirección del eje X. De esta

manera, el segmento definido por las proyecciones horizontales de los puntos 1 y 2' representa el verdadero tamaño del segmento original 12, ya que 12' es un segmento en posición horizontal. Por esta misma razón, el ángulo formado entre la proyección horizontal de 12' y LT es igual al ángulo β formado entre el segmento 12 y PH. Siguiendo un procedimiento análogo, el giro en torno a un eje de pié que pasa por 1 produce un segmento 12'' en posición frontal, por lo que el verdadero tamaño de 12 es representado por la proyección horizontal de 12'' y el ángulo formado entre éste y LT corresponde al ángulo α de 12.

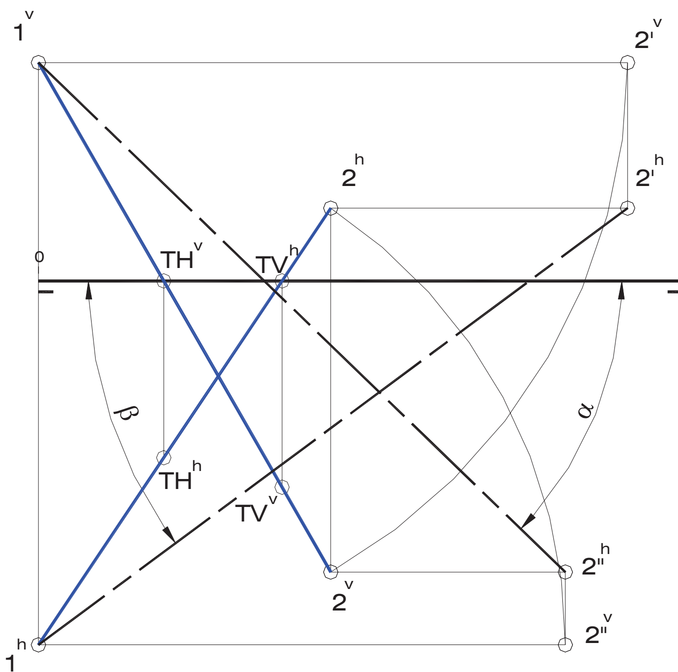


Fig. 5.3-a

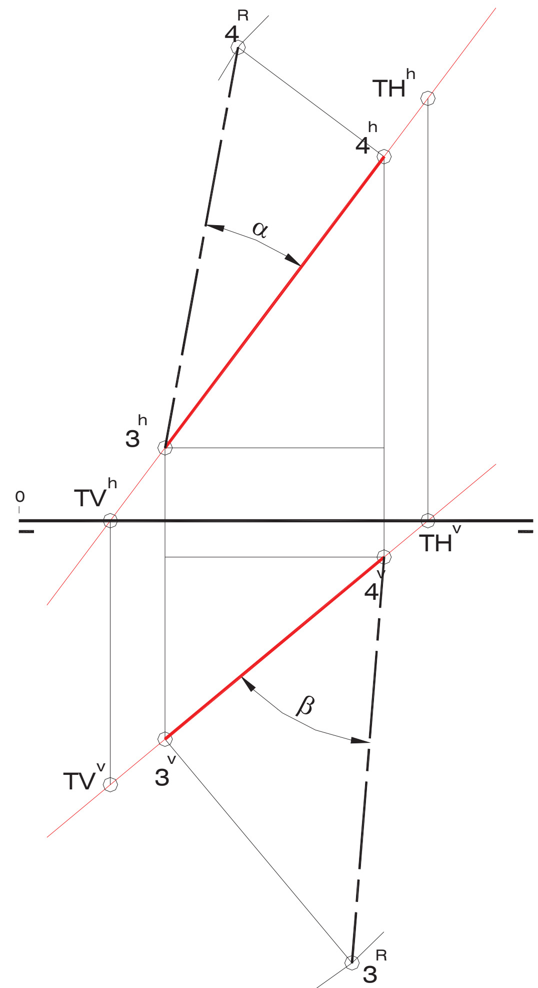


Fig. 5.3-b

Para responder a la última pregunta del problema se deben construir los dos triángulos de abatimiento del segmento 34. Uno de ellos está conformado por la proyección horizontal del segmento 34, la diferencia de cota entre sus extremos y el verdadero tamaño. Para construirlo se traza una perpendicular a la proyección horizontal del segmento por el extremo de mayor cota – 4 en el ejemplo – y se consigna sobre ella la diferencia de cota entre 2 y 4, dando lugar a 4^R. El segmento definido por este punto y la proyección horizontal del otro extremo, es decir 3, representa el verdadero tamaño del segmento de recta 34, en tanto que el ángulo formado entre éste y la proyección horizontal corresponde al ángulo α de la recta "b". De manera análoga, debe construirse en otro triángulo de abatimiento con

miras a la determinación del ángulo β; el procedimiento seguido se explica por sí mismo en la figura 5.3-b.

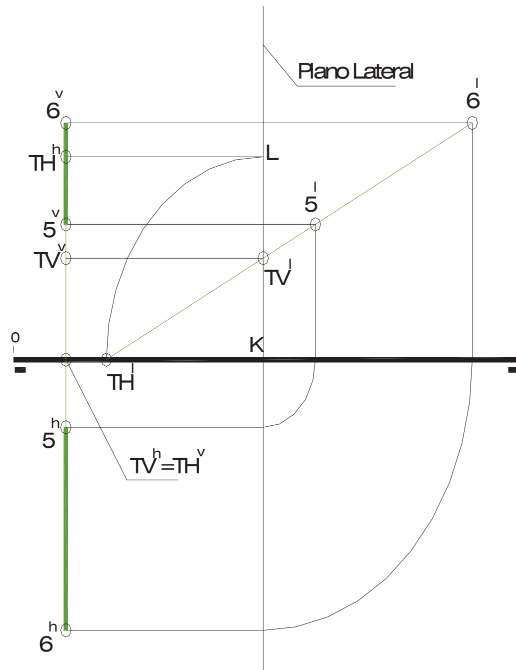


Fig. 5.3-c

En el caso de la recta "c" (Fig. 5.3-c) el procedimiento seguido para hallar los puntos de traza de las rectas "a" y "b" no es aplicable, dada la confusión que genera el hecho de que todos los puntos de la recta tienen idéntica abcisa. En tal circunstancia, es conveniente generar una nueva proyección de la recta, lateral en el ejemplo, para así determinar los puntos de traza. El procedimiento seguido es el siguiente: en primer lugar se determinan los puntos de corte entre la proyección lateral de la recta y LT y entre aquella y la representación diédrica del plano lateral auxiliar, puntos que constituyen las proyecciones laterales de TH y TV, respectivamente. Seguidamente, por TV^l se dibuja una referencia paralela a LT que corta a la proyección vertical de la recta en TV^v, para luego trazar un cuarto de circunferencia de centro en K (corte entre la representación diédrica del plano lateral y LT) y radio KTH^l, tomando la solución de menor vuelo, pues es evidente que el punto TH se encuentra en la parte negativa del plano horizontal de proyección. Trazando por L una paralela a LT se obtiene, en el corte con la proyección horizontal de la recta "c", la proyección icnográfica TH^h del punto de traza horizontal. Por último, las proyecciones TV^v y TH^v se confunden sobre LT, al igual que las proyecciones diédricas de la recta "c".

4) Determine la doble proyección ortogonal de los siguientes segmentos de recta:

- AB: forma 30° con el plano horizontal y 45° con plano vertical de proyección. El punto B(40, ??, ??) con mayor cota y mayor vuelo que A(10, 20, 15)y a su derecha.
- BC: mide 50 mm, C(70, 30, ??) de menor cota que B. Aplique cambio de plano.
- CD: forma 30° con el plano horizontal de proyección. D(110, 50, ??). El segmento es descendente de izquierda a derecha. Aplique giro.

Solución (Fig. 5.4)

La determinación del segmento AB pasa por el trazado de ambos triángulos de abatimiento, ya que los ángulos que el segmento forma con PH y PV son conocidos. Sin embargo, el verdadero tamaño de AB no se suministra como un dato, por lo que se asume una longitud arbitraria para hallar las proyecciones de un segmento AX, perteneciente a la misma recta que define el segmento AB. Así pues, se construye una circunferencia de diámetro AX cualquiera y se traza por uno de los extremos del diámetro horizontal un par de líneas rectas que formen 45° y 30° con dicho diámetro. Luego, se unen los puntos de corte entre las líneas así trazadas y la circunferencia, dando lugar a los triángulos de

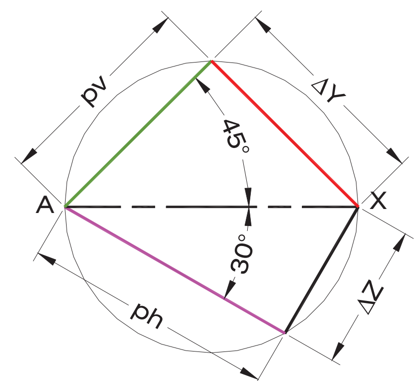


Fig. 5.4-a

abatimiento correspondientes al segmento AX ((Fig. 5.4-a).

Para hallar la proyección vertical del punto X se traza un arco de circunferencia de centro en A^v y radio igual a la longitud de la proyección vertical del segmento AX (pv en el triángulo de abatimiento) y se dibuja una línea paralela a LT situada a una distancia ΔZ por encima A^V (El punto B tiene mayor cota que el punto A); el corte entre el arco dibujado y esta línea es la proyección vertical de X.

Con centro en A^h y con radio igual a la proyección horizontal de AX (ph) se construye un arco de circunferencia; el corte entre éste y una referencia perpendicular a LT trazada por X^v da como resultado la proyección horizontal de X, tomando la solución de mayor vuelo como lo indica el enunciado del problema. Es necesario prolongar las proyecciones del segmento AX hasta cortar una referencia perpendicular a LT trazada en X=40 mm, pues los puntos resultantes constituyen la doble proyección ortogonal del punto B (Fig. 5.4-b).



Fig. 5.4-b

La proyección vertical del segmento BC es desconocida, ya que también lo es la coordenada Z del punto C. Para resolver esta incógnita se introduce un nuevo plano vertical de proyección, cuya intersección con PH es una nueva línea de tierra LT2 situada a cualquier distancia de la proyección horizontal de BC y paralela a ella. Seguidamente se construyen por B^h y C^h unas referencias perpendiculares a LT2 y se consigna sobre la primera la longitud de la cota de B a partir de LT2, obteniéndose así la proyección auxiliar B^2 y la posibilidad de usar el verdadero tamaño de BC para encontrar C^2, ya que en el sistema LT2 dicho segmento se encuentra en posición frontal. Así pues, se construye un arco de circunferencia de centro en B^2 y radio igual a 50 mm, el cual corta a la referencia perpendicular a LT2 que pasa por C^h en C^2. La distancia entre éste punto y LT2 representa la cota de C en ambos sistemas, por lo que se debe copiar, usando el compás, sobre la referencia de C a partir de LT para obtener la proyección vertical C^v.

El caso del segmento CD es similar al anterior pero debe ser resuelto aplicando giro. Este movimiento debe realizarse en torno a un eje de pié – que pase por uno de los extremos del segmento, C por ejemplo - con el fin de obtener un segmento CD' en posición frontal, ya que el ángulo que se suministra como dato es el ángulo α. En primer lugar se dibuja un arco de centro en C^h y radio igual a la proyección horizontal de CD, el cual corta a una paralela a LT trazada por C^h en el D'^h . Seguidamente, se traza por C^v una línea (proyección vertical de CD') que forme 30° (α) con LT, la cual corta a una referencia perpendicular a LT trazada por D'^h en un punto que constituye la proyección vertical de D'. Por último, se traza por D'^v una paralela a LT que corta a la referencia del punto D en D^h.

5) Determine la doble proyección ortogonal del segmento AB sabiendo que:
- Forma 30° con el plano horizontal de proyección .
- El punto B se encuentra en la región posterior-superior.
- A(20, 55, 20); B(50, 70, ??)

Aplique giro en la resolución del problema. Halle las proyecciones del punto P perteneciente a la recta definida por AB, el cual dista 30 mm de B y se encuentra a la derecha de éste.

Solución (Fig. 5.5)

Como se deduce del análisis de las coordenadas de A y B, la proyección vertical del segmento es desconocida, en tanto que el ángulo suministrado como dato es el formado entre el segmento en el espacio y la proyección horizontal (conocida).

Se presentan dos alternativas para determinar la proyección faltante del punto B: la construcción del triángulo de abatimiento formado por el verdadero tamaño, la proyección horizontal de AB y la diferencia de cota entre estos puntos, ya que el ángulo α es conocido, y el giro del segmento en torno a un eje de pié.

El problema debe ser resuelto aplicando giro, de acuerdo con el enunciado, por lo que se supone un eje de giro de pié que pasa por el punto A. Con centro en A^h y radio igual a la proyección horizontal de AB, se dibuja un arco que corta a una paralela a LT trazada por A^h en la proyección horizontal del punto B'. Seguidamente, se construye por A^v una línea que forme 30° (α) con LT, la cual corta a una referencia perpendicular a LT dibujada por B'^h, dando lugar a la proyección vertical de B'. Para hallar la proyección de B sobre el plano vertical bastará con buscar el punto de corte entre una paralela a LT trazada por B'^v y la referencia perpendicular a LT correspondiente al punto B.

En vista de que la proyección vertical del segmento AB' se encuentra en verdadero tamaño, debe determinarse sobre su prolongación la proyección vertical de P', midiendo 30 mm a la derecha de B'. Luego, se traza una paralela a LT por P'^v que corta a la proyección vertical de

la recta definida por el segmento AB en P^v. Finalmente, bastará con alinear en forma perpendicular a LT para encontrar P^h sobre la proyección horizontal de la mencionada recta.

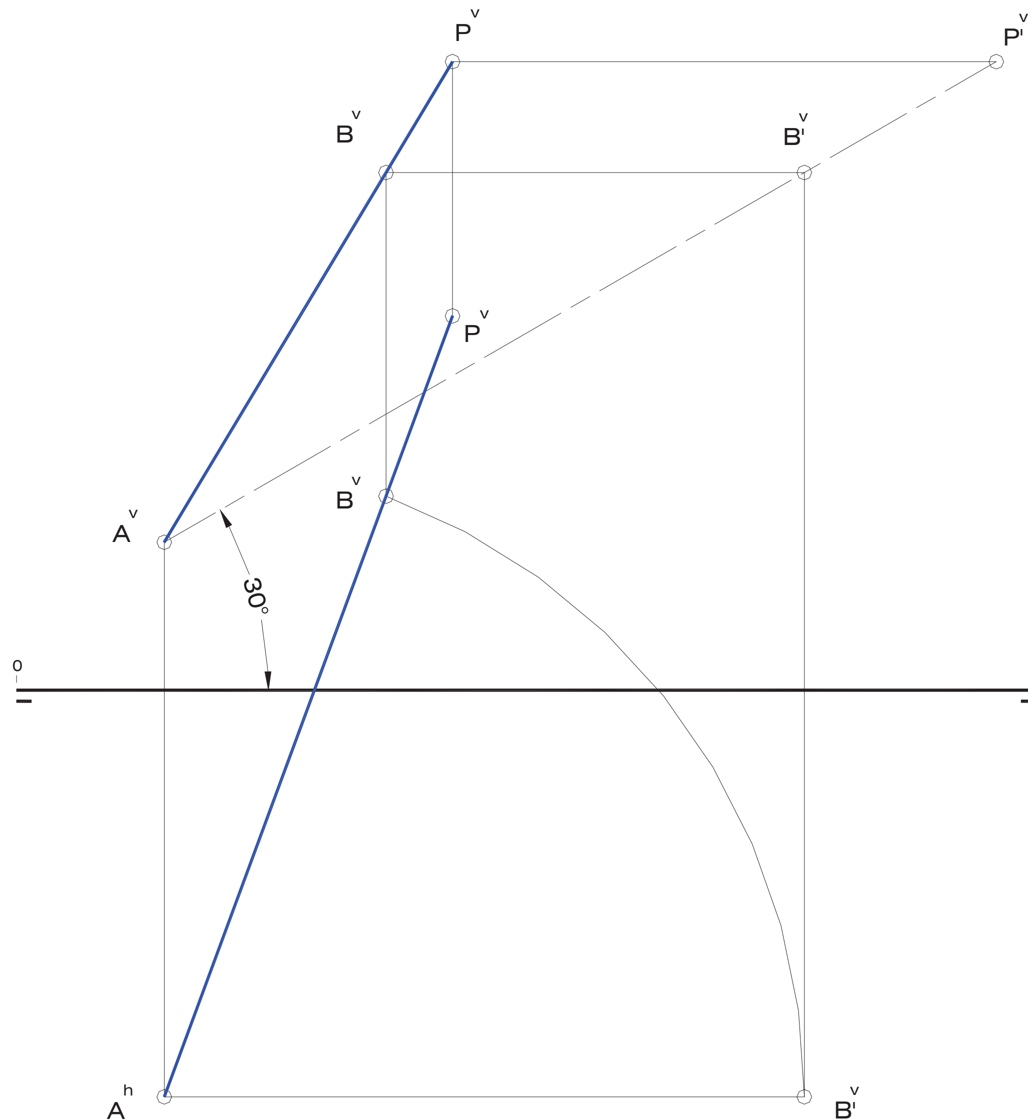


Fig. 5.5

6) Determine la doble proyección ortogonal del segmento de recta AB, el cual forma 45° con el plano horizontal y 30° con plano vertical de proyección y mide 55 mm. El punto B con mayor cota y menor vuelo que A(10, 25, 20) y a la derecha de éste. Aplique giro en la resolución del problema.

Solución (Fig. 5.6)

En primer lugar se construyen las proyecciones diédricas de un segmento frontal AB' de longitud 55 mm, el cual forma un ángulo de 45° con PH (B' de mayor cota y a la derecha). Luego, se hallan las proyecciones de un segmento de recta AB" de igual longitud, pero en

posición horizontal, formando 30° con PV (B" de menor vuelo y a la derecha); estos segmentos son el resultado de girar el segmento original AB en torno a un eje de pié y uno de punta, respectivamente. Para obtener la proyección horizontal del punto B bastará con trazar un arco de circunferencia de centro en A^h y radio $A^hB'^h$, el cual corta a una paralela a la línea de tierra trazada por B''^h en el punto buscado (B^h). Análogamente, el corte entre un arco de circunferencia de centro en A^v y radio $A^vB''^v$ y una paralela a LT dibujada por B'^v resulta en la proyección vertical del punto B, con lo cual queda definido el segmento de recta buscado.

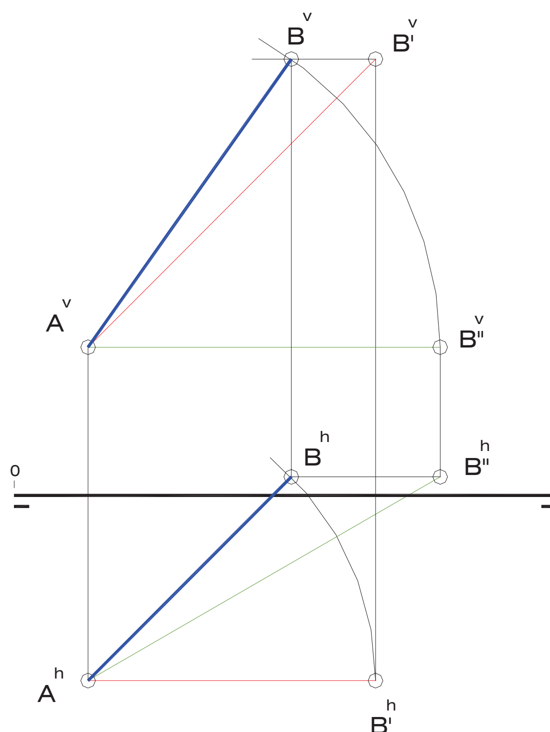


Fig. 5.6

5.2 Ejercicios resueltos de Plano

1) Construya la doble proyección ortogonal de una hexágono regular ABCDEF, sabiendo que se encuentra contenido en el plano δ, siendo M el punto medio del lado AB y N el punto medio del lado ED. Indique las trazas del plano δ.

$$\delta\begin{Bmatrix} M(30,20,50) \\ N(70,20,15) \\ 1(??,20??) \end{Bmatrix}$$

Solución (Fig. 5.7)

A partir de la inspección de las coordenadas de los puntos M, N y 1 que definen el plano δ, es fácil darse cuenta de que dicho plano es uno en posición *frontal*, ya que los vuelos de cada uno de esos puntos tienen el mismo valor. En consecuencia, la proyección vertical del hexágono ABCDEF resulta ser un polígono con las mismas características, es decir, el

hexágono se proyecta en *verdadero tamaño* sobre el plano vertical de proyección. Por otra parte, la proyección horizontal del polígono se reduce a un segmento de línea recta confundida con la traza horizontal del plano δ, recta ésta que es paralela a LT y tiene cota igual acero.

Se procede entonces a construir un hexágono regular a partir de los puntos M^v y N^v, puntos medios de las proyecciones verticales de los lados AB y ED del hexágono. Para ello se determina en primer lugar el punto medio O^v del segmento M^vN^v, quien viene a ser la proyección vertical del centro del polígono, puesto que los lados AB y ED son opuestos. Seguidamente, se dibuja una circunferencia de centro en O^v y diámetro M^vN^v, la cual es tangente a cada uno de los lados en sus puntos medios (circunferencia inscrita en el hexágono). A continuación se construye por Ov una línea recta que forme 30° con una paralela a M^vN^v y que corta a la circunferencia en los puntos medios P^v y Q^v de las proyecciones verticales de los lados BC y EF, respectivamente. Luego, si se trazan por tales puntos líneas perpendiculares al segmento que ellos definen, se obtendrán las proyecciones verticales de las rectas que contienen a los lados BC y EF, las cuales van a cortar a unas perpendiculares a M^vN^v dibujadas por los extremos de este segmento, en los puntos B^v y E^v.

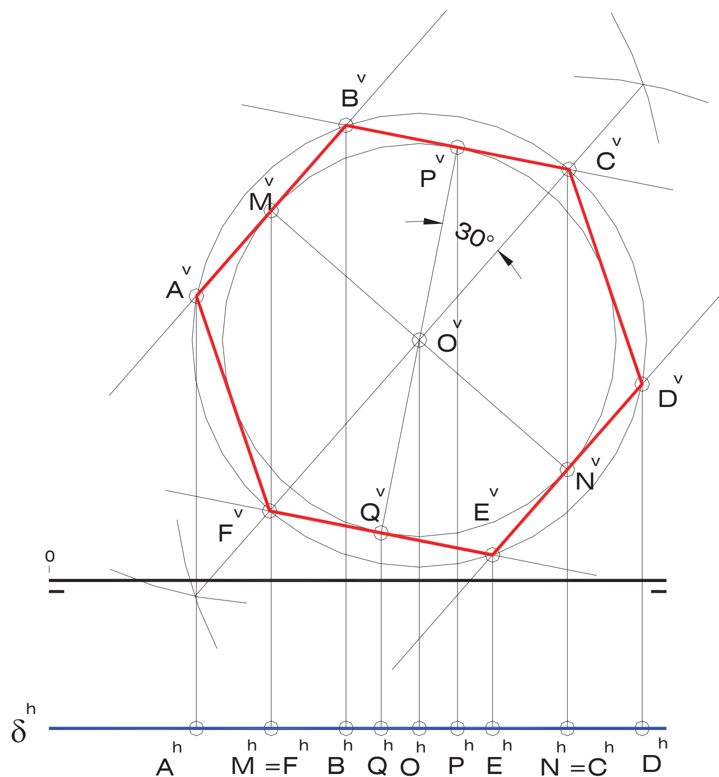


Fig. 5.7

Finalmente, bastará con construir una circunferencia de centro en O^v y radio $O^vB^v = O^vE^v$ para obtener las proyecciones verticales de los demás vértices del hexágono, como se deduce de la Fig. 5.7.

Las proyecciones horizontales de todos y cada uno de los puntos relevantes del polígono, así como de todos los puntos pertenecientes al plano δ, se ubican sobre la traza horizontal de éste, dado el ángulo de 90° que forma con el plano horizontal de proyección. La traza

vertical del plano es una recta impropia (en el infinito) por el paralelismo existente entre δ y el plano vertical de proyección.

2) Determine la doble proyección ortogonal de un pentágono regular ABCDE apoyado en un plano perpendicular a los planos de proyección, sabiendo que O(30,40,40) es el centro y que sobre la recta "m" se encuentra uno de los lados del polígono. Indique las trazas del plano.

$$.m\begin{Bmatrix} 1(??,10,20) \\ 2(??,00,40) \end{Bmatrix}$$

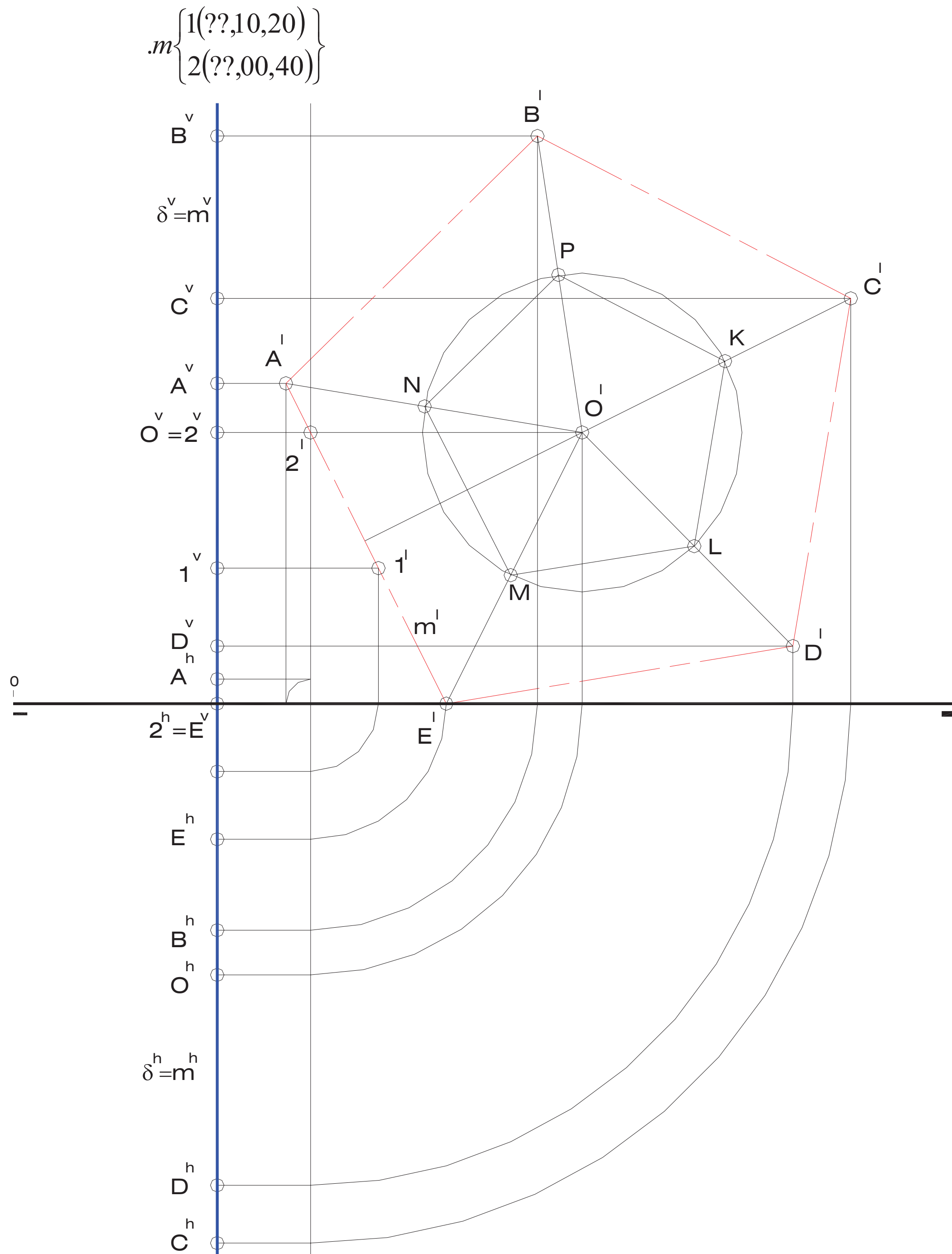


Fig. 5.8

Solución (Fig. 5.8)

La posición de un plano perpendicular a los planos de proyección es *de perfil* o paralelo al plano lateral, pues los planos de proyección principales en el sistema diédrico son PV y PH. Sobre la base de este razonamiento se concluye que las coordenadas X de los puntos 1 y 2 que definen a la recta "m" tienen un valor de 30 mm, ya que todos los puntos pertenecientes a una plano de perfil tienen idéntica abcisa. De lo anterior se desprende la necesidad de construir una proyección lateral en la cual aparezca el polígono ABCDE representado con su verdadera forma y dimensiones, es decir, en verdadero tamaño.

Una vez obtenidas las proyecciones laterales de O y de la recta "m", se procede a construir la proyección lateral del pentágono ABCDE, trazando por O^l una perpendicular a m^l y seleccionando sobre ella un punto K, vértice de un pentágono auxiliar KLMNP que tiene por centro a la proyección lateral de O. Las prolongaciones de los segmentos O^lM y O^lN cortan a la proyección lateral de la recta "m" en los puntos A^l y E^l los cuales constituyen uno de los lados de la proyección lateral del polígono buscado, para luego, aplicando semejanza de figuras planas, completar la mencionada proyección.

Las proyecciones diédricas de los puntos A, B, C, D y E se ubican a igual distancia del origen de coordenadas sobre las trazas del plano δ, las cuales vienen a ser una recta de punta y una de pié de coordenada X = 30 mm, confundidas en la doble proyección ortogonal en una misma perpendicular a la línea de tierra.

3) Determine las proyecciones diédricas de un triángulo equilátero ABC contenido en un plano δ, el cual es perpendicular al plano horizontal y forma 30° con el plano vertical de proyección (origen de trazas a la izquierda). El punto O(30,15,20) es el centro del polígono y el lado AB se encuentra sobre PV. Se recomienda no aplicar abatimiento o cambio de plano.

Solución (Fig. 5.9)

Una vez representada la doble proyección ortogonal del punto O, se procede a construir las trazas del plano δ, el cual es *proyectante horizontal*. Para ello, se taza por O^h una línea que forme 30° con LT y que corte a ésta a la derecha de O en el origen de trazas K; dicha línea no es más que la traza horizontal del plano.

La traza vertical de δ se obtiene al levantar por K una perpendicular a LT, ya que tiene una posición de pié.

En vista de que el lado AB se encuentra sobre PV, se concluye que pertenece a la traza vertical del plano δ, por lo tanto, la altura CM del triángulo ABC tiene una posición horizontal. Así, el corte entre la traza vertical de δ y una recta horizontal del mismo plano trazada por O resulta en el punto M. Si se copia el doble de la longitud OM (en proyecciones) sobre dicha horizontal a partir de O y a su derecha, se obtiene el vértice C del triángulo.

Es necesario construir aparte un triángulo equilátero de altura igual al varadero tamaño de CM (Ver Apéndice), con la finalidad de obtener la longitud de los lados. Una vez efectuada esta operación, se procede a copiar la mitad de dicha longitud sobre la traza vertical del plano δ a cada lado (arriba y abajo) de M^v, pues, como ya se ha indicado, la mencionada traza contiene al lado AB del triángulo, cuyo punto medio es M. De esta manera se obtienen las proyecciones verticales de A y B, recordando que las proyecciones horizontales de dichos puntos se confunden con la de los puntos M y K, por ser la traza vertical una recta de pié.

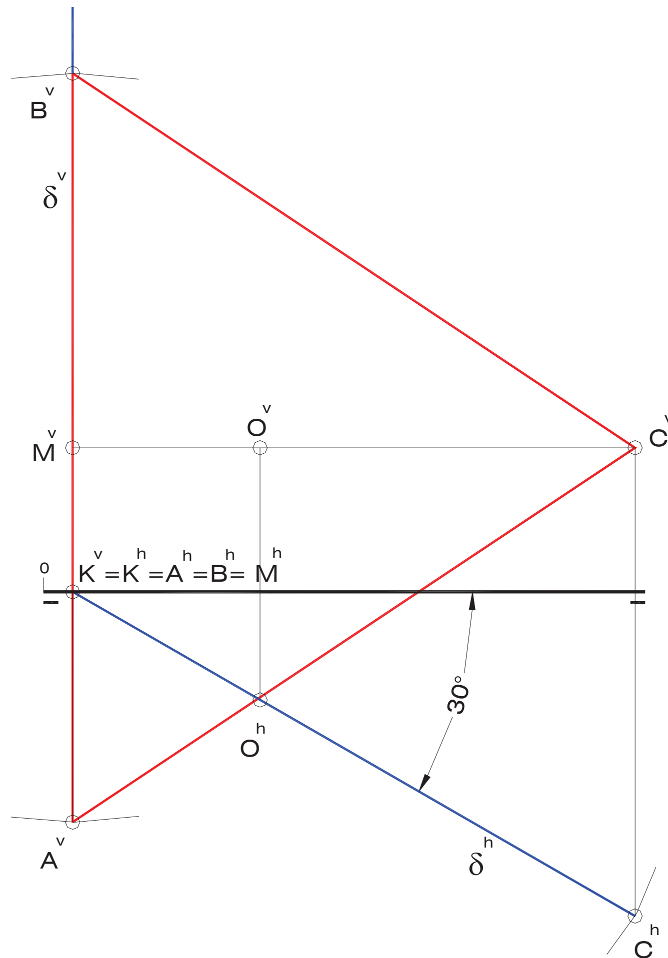


Fig. 5.9

4) Construya la doble proyección ortogonal de un pentágono regular ABCDE contenido en un plano ω que forma 45° con el plano horizontal de proyección. A(10, 25, 25) es uno de los vértices y O(26, 25, 25) es el centro del polígono. Indique las trazas del plano ω. Se recomienda no aplicar abatimiento o cambio de plano.

Solución (Fig. 5.10)

El plano que contiene al polígono pedido posee rectas paralelas a LT, como lo es el segmento AO; por otra parte, dicho plano forma un ángulo distinto de cero o 90° con PH. Ambas características indican claramente que ω es un plano paralelo a LT o proyectante lateral, ya que las rectas paralelas a LT solo pueden formar parte de planos frontales, que forman 90° con PH, planos horizontales, que son paralelos a PH, o de planos paralelos a LT, los cuales resultan ser oblicuos, como es el caso de ω, con respecto a ambos planos de proyección.

El problema puede ser resuelto sin necesidad de aplicar alguno de los métodos utilizados en la determinación del verdadero tamaño de polígonos. Esto debido a que el segmento AO, y por lo tanto la altura definida por A y el punto medio M del lado CD, tiene una posición notable, por ser paralela a LT. Lo mismo puede decirse de la diagonal BD y el lado CD, segmentos que son de perfil.

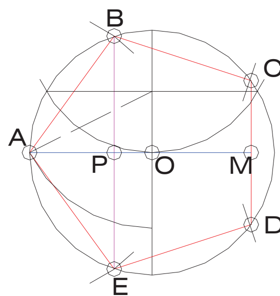


Fig. 5.10-a

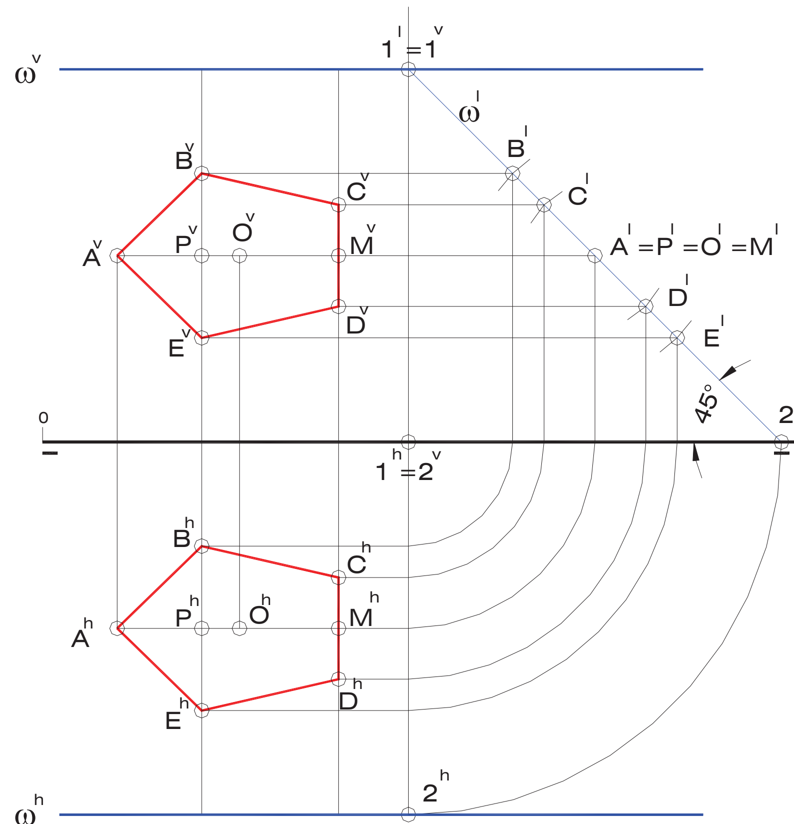


Fig. 5.10-b

El procedimiento comienza por la construcción de un pentágono auxiliar de radio igual al segmento OA (Fig. 5.10-a) aplicando el algoritmo descrito en el Apéndice. Luego, se traslada la longitud AM de la figura auxiliar a las proyecciones diédricas del segmento AO (ambas en verdadero tamaño) obteniéndose las proyecciones de M, punto medio del lado CD. Seguidamente, se determinan las proyecciones laterales de A, O y M, las cuales se confunden en un mismo punto por el que pasa la traza lateral del plano ω formando 45° con la línea de tierra. Esta traza lateral corta a la referencia empleada para obtener la proyecciones laterales en un punto 1 perteneciente a la traza vertical del plano; luego, por 1^v se dibuja una paralela a LT que representa a ω^v. Análogamente, la traza lateral corta a PH en 2, por lo que la proyección lateral de 2 se halla en el punto común a ω^l y a la línea de tierra; luego, la traza horizontal del plano ω pasa por 2^h y es también paralela a LT.

A continuación es necesario copiar la longitud del segmento AP del pentágono auxiliar, partiendo de las proyecciones de A y sobre la recta definida por A y O (paralela a LT). Luego, se consigna la longitud de la semidiagonal del pentágono (PB=PE) a partir de B y a cada lado de la proyección lateral de P sobre la recta de perfil del plano que pasa por este punto, obteniéndose así los vértices B y E, primero en la proyección lateral y luego en proyecciones diédricas.

Finalmente y siguiendo un procedimiento similar, se copia la longitud MC (o MD) sobre la recta de perfil que pasa por el punto M y cada lado de éste, para definir de esta manera los vértices faltantes C y D.

5) Halle las trazas del plano γ determinado por las rectas paralelas “m” y “n”

$$m\begin{Bmatrix}1(25,15,30)\\2(45,35,10)\end{Bmatrix}\qquad n\begin{Bmatrix}3(40,05,25)\\4(??,??,??)\end{Bmatrix}$$

- Determine la doble proyección ortogonal de los puntos P(15, ??, 22) y Q(??, 30, 17), ambos pertenecientes al plano γ.
- Construya las proyecciones diédricas de la recta “r” definida por el segmento AB, contenido en el plano γ.

$$r\begin{Bmatrix}A(40,50,??)\\B(10,10,??)\end{Bmatrix}$$

Solución (Fig. 5.11)

En primer lugar es necesario determinar las proyecciones diédricas de los puntos de traza de las rectas “m” y “n”, ésta última paralela a “m” y pasa por el punto 3, lo que implica que las proyecciones de “n” son paralelas a las proyecciones homónimas de “m”.

La traza horizontal del plano γ está determinada por los puntos de traza horizontal TH y TH’, en tanto que la traza vertical de γ lo está a través de los puntos de traza vertical TV y TV’. Ambas trazas del plano deben converger en un punto sobre LT.

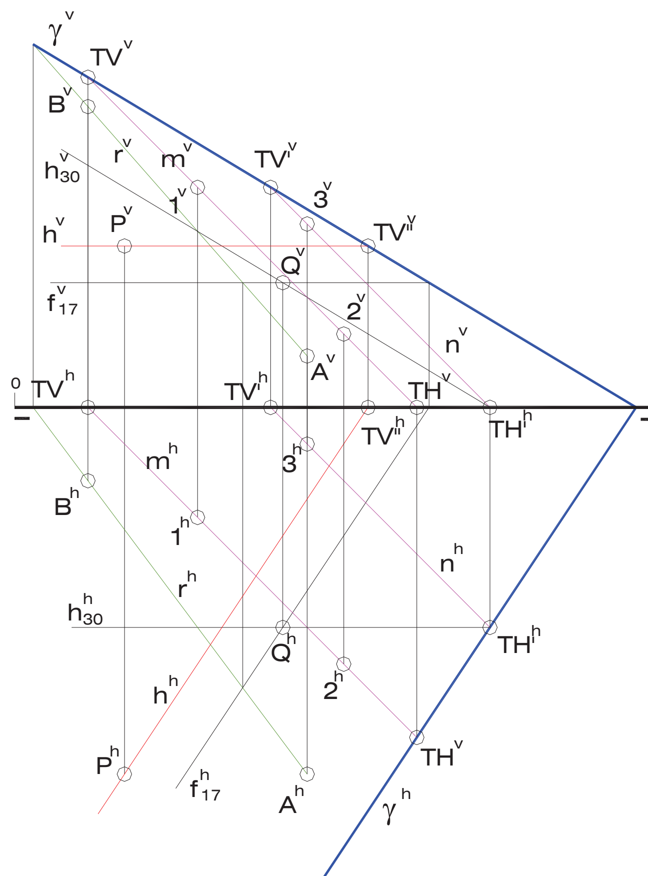


Fig. 5.11

Para encontrar la proyección faltante (horizontal) del punto P debe construirse una recta cualquiera perteneciente a γ y que pase por P. Sea esta recta una horizontal "h" del plano γ; la proyección vertical de "h" es paralela a LT y corta a γ^v en la proyección vertical del punto TV' (traza vertical de la recta "h"), cuya proyección horizontal se sitúa sobre LT. Luego, por ésta se traza una paralela a γ^h que representa a la recta "h" en proyección horizontal. El punto de corte entre h^h y una referencia perpendicular a LT trazada por P^v resulta en la proyección horizontal de P.

En vista de que se desconoce la coordenada X del punto Q, la determinación de sus proyecciones diédricas pasa por la construcción de una recta horizontal del plano de cota igual a 17 mm (cota de Q) y una frontal, también del plano γ, de vuelo igual a 30 mm (vuelo de Q); luego, los puntos comunes a las proyecciones homónimas de ambas rectas son las proyecciones del punto Q buscado.

De acuerdo con lo señalado en el Capítulo II, si una recta pertenece a un plano entonces deberá cortar a por lo menos dos de la rectas de ese plano. En el ejercicio, se conoce la proyección horizontal del segmento AB, de manera que se deben buscar los puntos de corte entre esta proyección y las proyecciones horizontales de otras dos recta del plano γ, como por ejemplo la frontal de vuelo 17 mm – usada para hallar las proyecciones de Q – y la traza vertical de γ, ésta última sobre LT en proyección horizontal. Luego, alineando en forma perpendicular a LT se obtienen, sobre las proyecciones verticales correspondientes (f'^v_{17} y γ^v), los puntos comunes buscados, los cuales definen la proyección vertical de la recta "r". Finalmente, bastará con trazar los respectivos alineamientos para encontrar A^v y B^v.

6) Defina las trazas del plano δ y encuentre las proyecciones de:
- Una frontal "f" del plano de vuelo 10 mm.
- Una horizontal "h" del plano de cota –20 mm.
- Un triángulo ABC contenido en δ, sabiendo que el lado AB es frontal, mide 35 mm y se encuentra a 15 mm por delante de PV (B a la derecha); el lado AC es horizontal, mide 45 mm y tiene cota igual a 40 mm (C de mayor cota).

$$\delta\left\{\begin{matrix}1(10,00,00)\\2(40,20,40)\\3(60,45,15\end{matrix}\right\}$$

Solución (Fig. 5.12)

Las trazas de cualquier plano están compuestas por los puntos de traza homónimos de las infinitas rectas pertenecientes a aquél. Ambas trazas de un plano – la vertical y la horizontal – se cortan en un punto de cota y vuelo igual acero, es decir, en un punto sobre la línea de tierra. Obsérvese que 1, uno de los puntos que determinan al plano δ del ejemplo, cumple con esta característica, por lo que únicamente se requieren un punto de traza vertical y uno de traza horizontal de cualquiera de las rectas que están contenidas en δ. Así pues, se hallan los puntos TV y TH, puntos de traza de la recta que define el segmento 23; la recta definida por 1 y TV es la traza vertical δ^v del plano, en tanto que la recta determinada por 1 y TH constituye la traza horizontal δ^h. Es importante recordar que la proyección vertical de la traza horizontal del plano se encuentra sobre LT, al igual que la proyección horizontal de la traza vertical.

La proyección horizontal de la recta frontal "h" es paralela a LT y se encuentra a una distancia de 10 de ésta; siendo una recta del plano δ, su traza horizontal TH' se encuentra sobre la traza horizontal de δ. La proyección vertical de "f" es paralela a la traza vertical del plano y pasa por la proyección vertical de TH'.

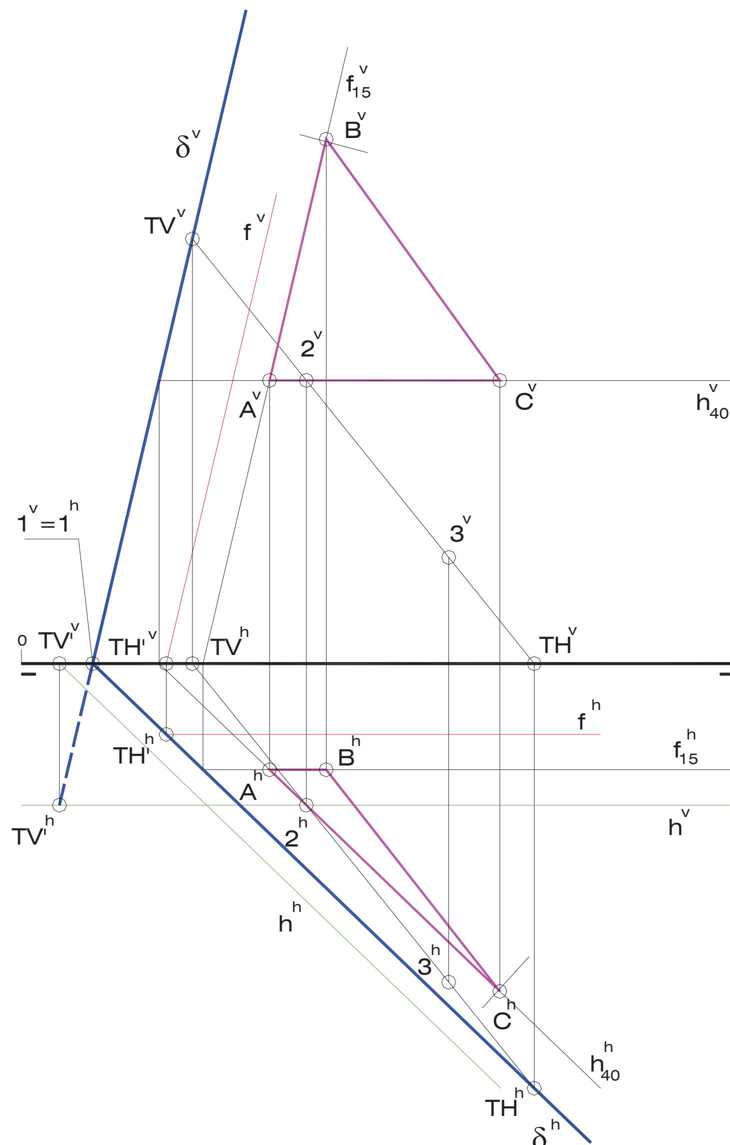


Fig. 5.12

De manera análoga, la proyección vertical de la recta “h” es una paralela a LT situada a 20 mm por debajo de ésta (cota negativa) que corta a la traza vertical del plano δ en el punto TV’. La proyección horizontal de “h” es paralela a la traza horizontal δh y pasa por la proyección horizontal de TV’, ésta última sobre la línea de tierra.

Al leer cuidadosamente el enunciado del problema, se concluye que el vértice A del triángulo ABC pedido es el punto común a la recta frontal del plano de vuelo 15 mm (f_{15}) y a la recta horizontal del plano de cota 40 mm (h_{40}). Estas rectas se construyen siguiendo un procedimiento similar al empleado en la determinación de las rectas “h” y “f”. Luego, se procede a consignar las longitudes de los lados AB y AC del triángulo sobre las correspondientes rectas, recordando que esta operación debe realizarse en la proyección que se encuentra en verdadero tamaño, vale decir, en la proyección horizontal de la recta h_{40} para el segmento AC y en la proyección vertical de la recta f_{15} para el segmento AB. De

esta manera se completan las proyecciones del triángulo ABC y se finaliza la resolución del ejercicio.

7) Construya la doble proyección ortogonal de un cuadrado ABCD contenido en un plano δ dado por una de sus rectas de máxima inclinación "m". Se sabe que el vértice A del polígono se encuentra sobre el plano horizontal de proyección y que el vértice C tiene vuelo igual a cero. La longitud de la diagonal del cuadrado es de 50 mm. Resuelva el problema aplicando cambio de plano y tome la solución de mayor vuelo para C.

$$m\begin{Bmatrix} 1(35,12,22) \\ 2(55,38,06) \end{Bmatrix} \quad A(40,??,??)$$

Solución (Fig. 5.13)

Como es sabido, las rectas de máxima inclinación de un determinado plano δ son perpendiculares a las rectas frontales contenidas en él; de igual forma, son perpendiculares a la traza vertical de dicho plano, por ser ésta recta la frontal de vuelo cero. Por otra parte, la traza vertical del plano δ debe pasar por los puntos de traza vertical de las rectas pertenecientes a δ, incluyendo obviamente a las de máxima inclinación. De manera pues que bastará con trazar una perpendicular a la proyección vertical de "m" por su punto de traza vertical TV para obtener la traza vertical del plano δ. Luego, el punto de corte K entre esta recta y la línea de tierra viene a ser el origen de trazas del plano en cuestión, punto por el que también pasa la traza horizontal, por lo que la recta definida por K^h y la proyección horizontal de la traza horizontal de "m" constituye la recta común al plano δ y a PH, es decir, la traza horizontal δ^h (Fig. 5.13-a).

Siendo el punto A un punto sobre PH, debe pertenecer a la traza horizontal del plano δ y tener cota igual a cero, por lo que su proyección vertical A^v se encuentra sobre la línea de tierra. Por otra parte, como el vértice C tiene vuelo igual a cero, se entiende que pertenece a la traza vertical del plano δ.

Para encontrar el resto de los vértices del cuadrado ABCD resulta necesario generar una nueva proyección en la que sea posible obtener el verdadero tamaño del polígono. En esa nueva proyección deben aparecer los elementos del plano δ que conducen a la solución del problema, es decir, el punto A y la traza vertical δv del plano.

El primer plano de proyección auxiliar debe ser perpendicular a las rectas frontales o a las rectas horizontales del plano δ. En la figura 5.13-a se ha construido perpendicular a la traza horizontal de δ, lo que se traduce en un segunda línea de tierra LT2 también perpendicular a dicha traza. La nueva proyección A^2 del punto A se obtiene trazando una referencia perpendicular a LT2 y consignando sobre ella, a partir de LT2, la cota del punto. Aplicando un procedimiento similar se obtienen las nuevas proyecciones (TV^2 y K^2) de dos puntos pertenecientes a la traza vertical del plano δ.

Dado que en el sistema LT2 el plano δ es proyectante vertical, su proyección sobre el primer plano auxiliar se reduce a una recta δ^2 definida por las nuevas proyecciones de A, TV y K. La línea de tierra LT3 correspondiente a un tercer sistema en el que δ tiene una posición notable, debe ser paralela a δ^2 , de manera que las proyecciones A^3, K^3 y TV^3 se obtienen trazando por A^2, K^2 y TV^2, respectivamente, líneas de referencia perpendiculares a LT3 y consignando a partir de ésta los vuelos del segundo sistema. La segunda proyección auxiliar así encontrada ofrece el verdadero tamaño de cualquier figura contenida δ, pues éste plano tiene una posición horizontal en el sistema LT3.

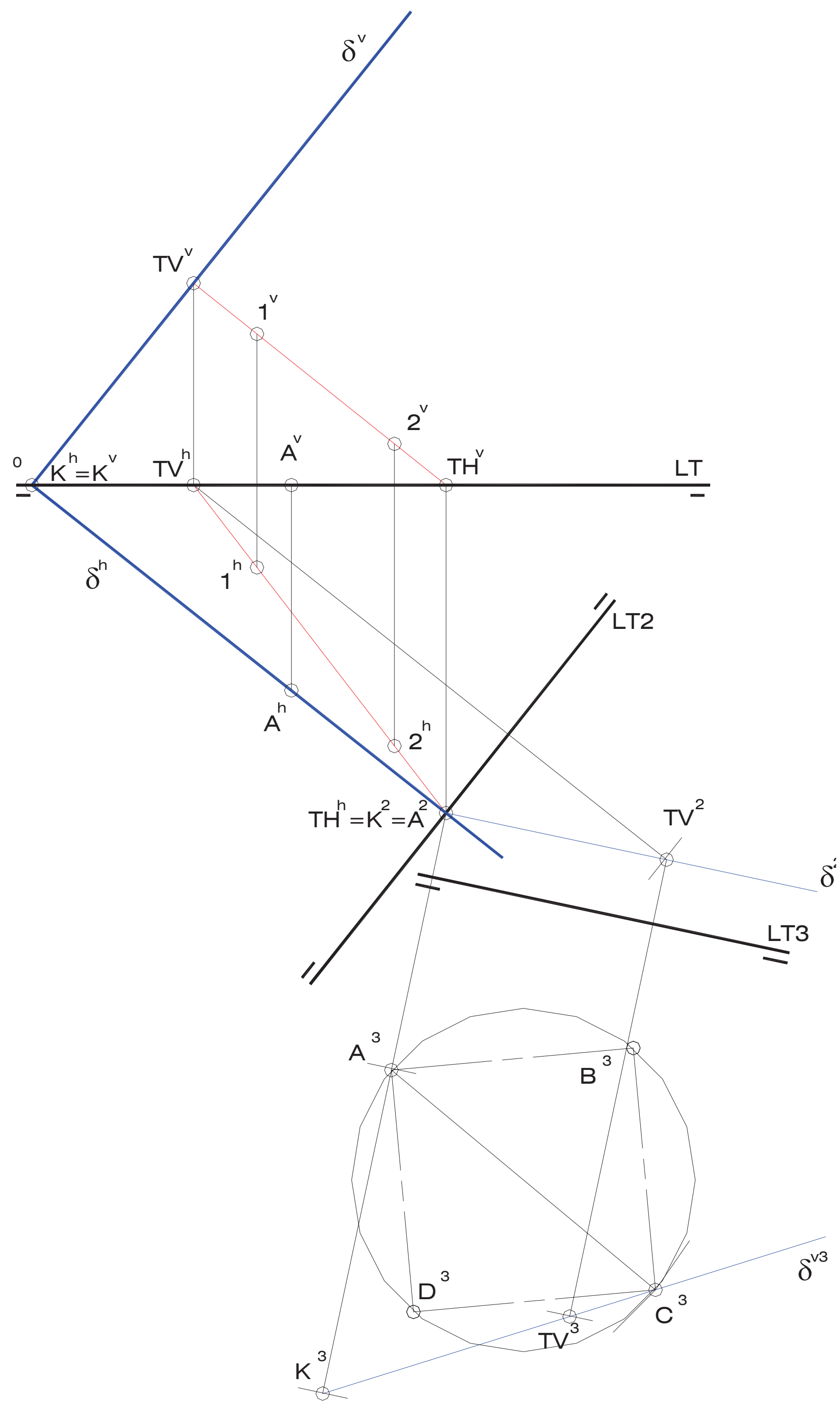

δv
TVv
1v
2v
0
Kh=Kv
TVh
Av
THv
LT
δh
1h
LT2
Ah
2h
THh=K2=A2
TV2
LT3
A3
B3
D3
C3
TV3
K3
δv3

Fig. 5.13-a

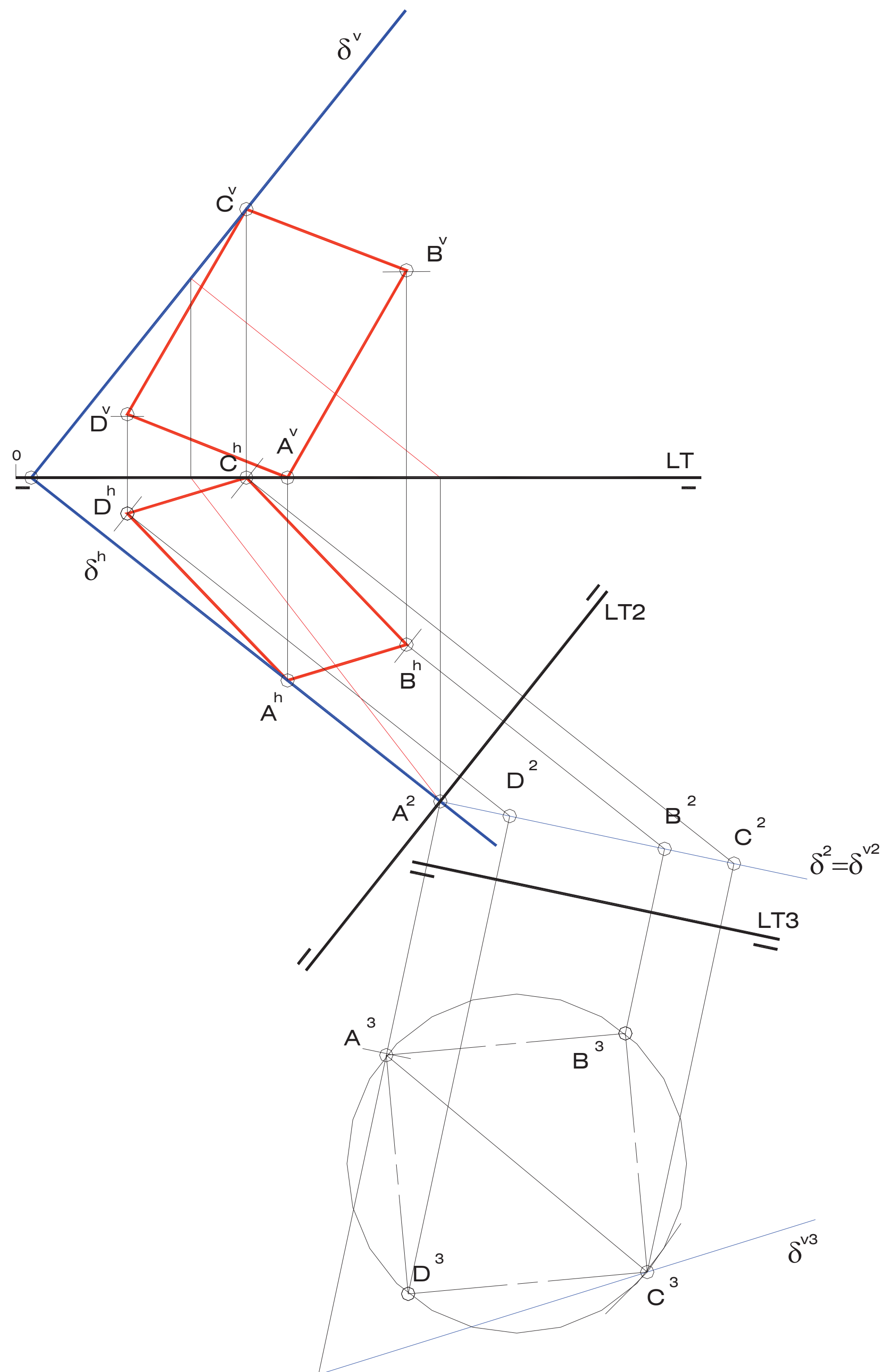

δv
Cv
Bv
Dv
Av
0
Ch
LT
Dh
δh
LT2
Bh
Ah
D2
A2
B2
C2
δ2=δv2
LT3
A3
B3
D3
C3
δv3

Fig. 5.13-b

Trazando un arco de centro en A^3 y radio igual a la longitud de la diagonal del cuadrado ABCD (50 mm) se obtiene, en el corte con la línea recta definida por TV^3 y K^3, la segunda proyección auxiliar C^3 del vértice C. Hecho esto se procede a dibujar el cuadrado $A^3B^3C^3D^3$, verdadero tamaño del cuadrado ABCD pedido (Fig. 5.13-a).

Para encontrar las proyecciones auxiliares B^2, C^2 y D^2 basta con hallar los puntos de corte entre referencias perpendiculares a LT3 trazadas por B^3, C^3 y D^3, respectivamente, y la traza del plano δ en el primer plano auxiliar, es decir, δ^2. Posteriormente se dibujan líneas de referencia perpendiculares a LT2 por las proyecciones B^2, C^2 y D^2, consignando sobre ellas, a partir de LT2, los vuelos correspondientes del sistemas LT3, dando así lugar a las proyecciones horizontales de los puntos A, B y C (Fig. 5.13-b).

Para obtener las proyecciones verticales de los vértices del cuadrado se puedes aplicar distintos métodos. Uno de ellos consiste en poner en práctica la condición de pertinencia de punto a plano, valiéndose de rectas contenidas en δ que pasen por los puntos B, C y D. Otro método consiste en copiar la cota de cada uno de estos puntos del segundo al primer sistema de proyección, método que se aplicado en la solución que muestra la Fig. 5.13-b.

8) Determine la doble proyección ortogonal de un pentágono ABCDE contenido en un plano δ, sabiendo que sobre la recta "m" se encuentra el lado AB del polígono y que el lado DE tiene vuelo igual acero. B se encuentra a la derecha de A. Aplicar abatimiento.

$$m\begin{Bmatrix} A(35,16,00) \\ 1(70,37,00) \end{Bmatrix}$$

Solución (Fig. 5.14)

Fig. 5.14-a

Dado que el lado AE se encuentra sobre la traza horizontal del plano δ con B a la derecha de A - pues es evidente que la recta "m" tiene cota igual a cero - y que el lado DE pertenece a la traza vertical de dicho plano, el ángulo formado entre las mencionadas trazas debe ser

igual a 72°, valor éste igual al del ángulo que forman los lados AB y DE del pentágono en cuestión.

En consecuencia, es imprescindible construir en primer lugar el verdadero tamaño del polígono abatido sobre PH. Como no se conoce la longitud de los lados se procede dibujando un pentágono regular A'B'C'D'E' de longitud de lado arbitraria, haciendo coincidir a A' con A^R y al lado A'B' con la traza horizontal (eje de abatimiento) del plano. Luego, trazando por el punto K (origen de trazas) una paralela al lado D'E' se obtiene la traza vertical del plano δ abatida sobre PH y, aplicando semejanza entre figuras planas, se logran los vértices B^R, C^R, D^R, E^R y F^R del verdadero tamaño del polígono pedido, sabiendo que el lado D^RE^R se halla sobre δ^{vR} (Fig. 5.14-a).

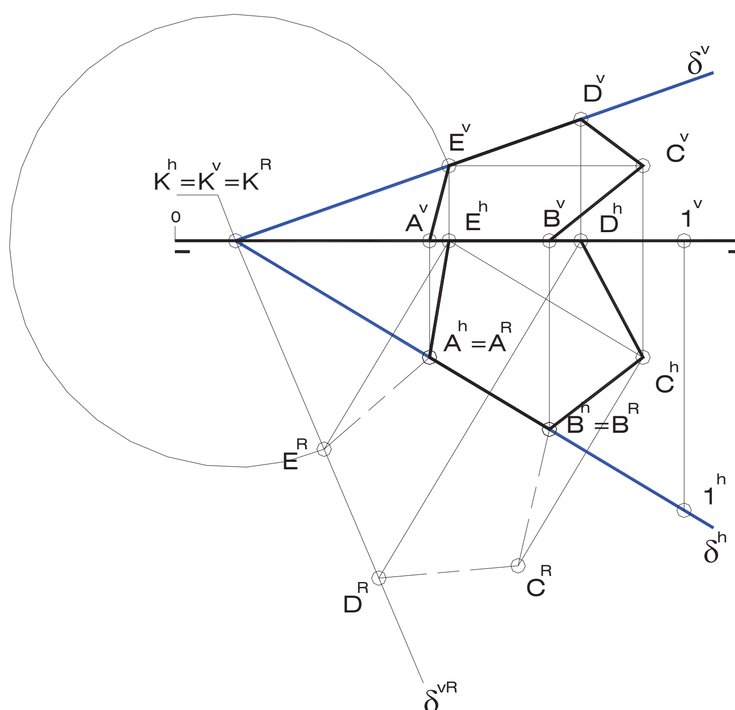


Fig. 5.14-b

Es evidente que la proyección horizontal del punto B coincide con B^R, ya que el eje de abatimiento es la traza horizontal de δ. Por otra parte, las proyecciones horizontales de D y E se obtienen en los cortes entre unas perpendiculares a δ^h trazadas por D^R y E^R, respectivamente, y la línea de tierra, dado que ambos vértices poseen vuelo igual a cero.

Para obtener la proyección vertical de E se procede de la siguiente forma: en primer lugar se construye un arco de centro en el punto K – origen de trazas, por lo que $K^h=K^v=K^R$ - y radio igual al segmento KE^R, luego, se construye una perpendicular a LT que pase por la proyección horizontal de D; el punto de corte entre el arco y la perpendicular viene a ser E^v. Todo esto es posible gracias a que la longitud del segmento KE se encuentra en verdadero tamaño en proyección vertical.

La recta determinada por el origen de trazas K y el punto E es la traza vertical δ^v del plano, luego, trazando por D^h una perpendicular a LT se obtiene D^v sobre δ^v.

Finalmente, es posible hallar la doble proyección ortogonal del vértice C aprovechando el hecho de que, por la posición que tiene el pentágono en el problema, el segmento EC es

horizontal, de manera que, bastará con hallar el punto común entre una paralela a δ^h trazada por E^h y una perpendicular a δh trazada por C^R, para encontrar la proyección horizontal de C.; luego, C^v se halla en una paralela a LT trazada por E^v (Fig. 5.14-b).

9) Determine la doble proyección ortogonal de un triángulo equilátero ABC contenido en un plano δ, sabiendo que la longitud de sus lados es de 35 mm, que el vértice B se encuentra sobre el plano horizontal de proyección y que A se halla en la bisectriz del ángulo formado entre las partes positivas de las trazas del plano δ. Tome la solución de menor vuelo para el punto B y aplique abatimiento en la resolución del problema.

$$\delta\begin{Bmatrix} 1(15,00,00) \\ 2(60,00,50) \\ 3(70,45,00) \end{Bmatrix} \qquad A(60,??,??)$$

Solución (Fig. 5.15)

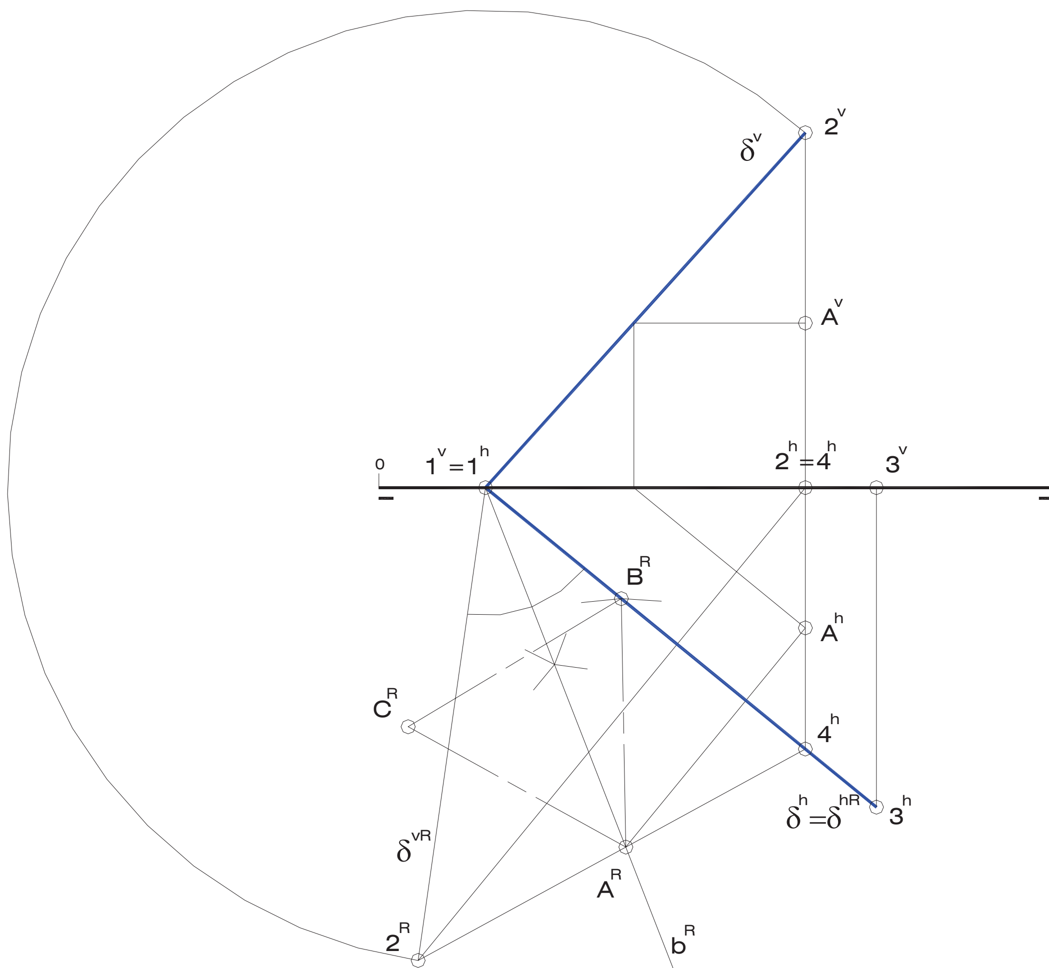


Fig. 5.15-a

Abatiendo el punto 2 en torno a la traza horizontal del plano se obtiene 2^R, el cual define junto al punto 1 (origen de trazas) a la traza vertical del plano δ abatida sobre PH. En vista de que la traza horizontal de δ ha sito tomada como eje de abatimiento, permanece inmóvil en el proceso, de manera que $\delta^h = \delta^{hR}$.

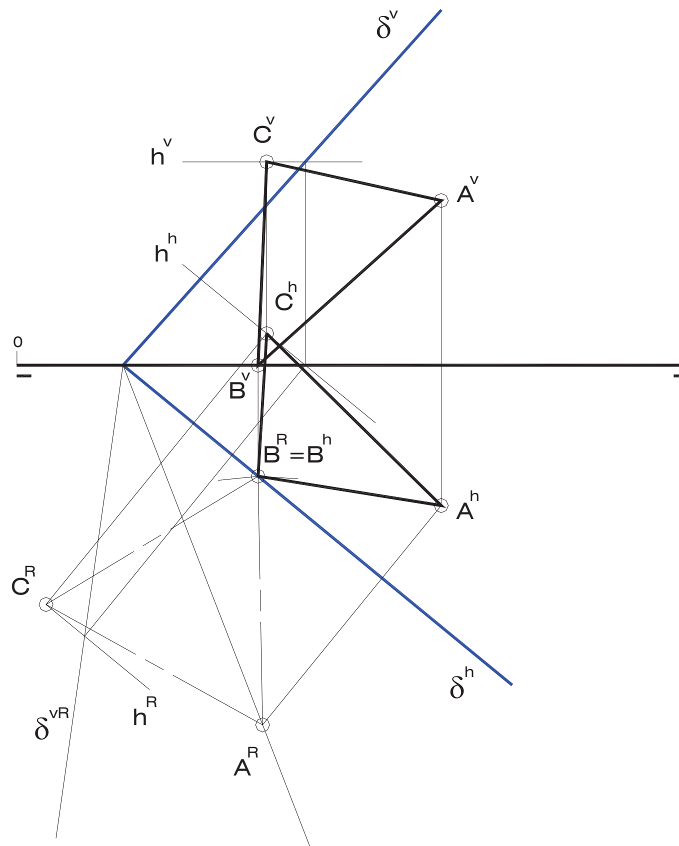


Fig. 5.15-b

Si el punto A tiene un valor de 60 mm en su coordenada X, es posible aseverar que dicho punto pertenece a la recta de perfil del plano δ cuyos puntos tienen coordenada X igual a 60 mm. De manera que, si se abate el segmento de perfil definido por los puntos 2 y 4 y se determina la bisectriz del ángulo formado entre las partes positivas de ambas trazas abatidas del plano δ, es posible hallar, en el corte de ambos elementos obtenidos, al punto A abatido (A^R) sobre PH.

Seguidamente, se procede a l trazado del verdadero tamaño del triángulo ABC, para lo cual se traza un arco de centro en A^R y radio igual a 35 mm, arco éste que corta a la traza horizontal abatida del plano δ en B^R; luego, trazando arcos de igual radio que el anterior y haciendo centro sucesivamente en A^R y B^R se obtiene a C^R (Fig. 5.15-a).

Para determinar la proyección horizontal del punto A basta con trazar una perpendicular al eje de abatimiento, que corte a la proyección horizontal de la recta de perfil del plano de abcisa igual a 60 mm, definida por los puntos 2^h y 4^h. Luego, mediante el uso de una recta horizontal del plano es posible obtener la proyección vertical del punto A.

La proyección horizontal de B coincide con B^R, puesto que dicho punto se halla sobre el eje de abatimiento. Por esta misma razón, su cota es igual a cero, tal que la proyección vertical de B yace sobre la línea de tierra.

Finalmente, para encontrar la doble proyección ortogonal del vértice faltante, es decir C, se puede emplear la recta horizontal del plano δ sobre la cual dicho punto se encuentra. Esta recta horizontal resulta ser paralela a la traza horizontal del plano tanto en el verdadero tamaño como en la proyección horizontal, siendo paralela a la línea de tierra en la proyección vertical. (Fig. 5.15-b).

10) Determine la doble proyección ortogonal de un hexágono regular ABCDEF de lado 25 mm contenido en un plano γ paralelo a la línea de tierra. El punto B se encuentra sobre el plano horizontal de proyección y a la derecha de A. Aplique giro en dos etapas: la primera en torno a una recta de pié de abcisa 50 mm y vuelo 25 mm.

Cota de la traza vertical de γ: 35 mm.
Vuelo de la traza horizontal de γ: 50 mm.
$A(15,??,05)$

Solución (Fig. 5.16)

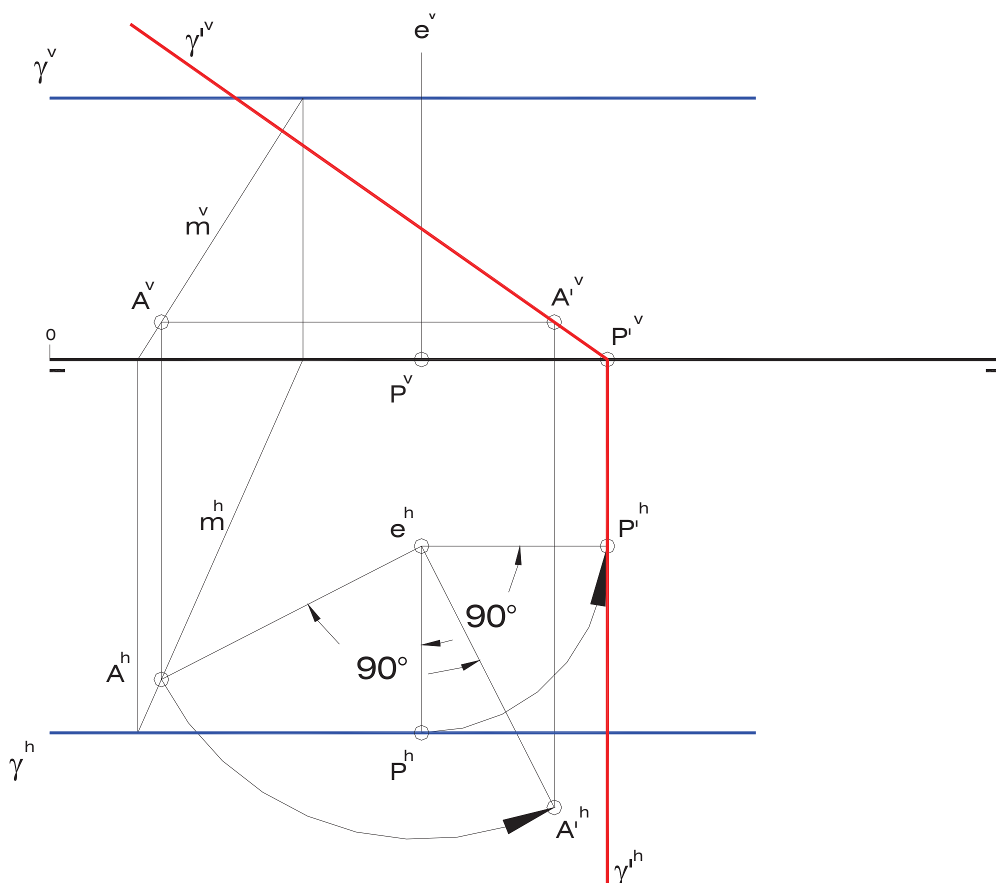


Fig. 5.16-a

El primer paso en la resolución de este problema consiste en la construcción de las trazas del plano γ, ambas paralelas a la línea de tierra, partiendo de los valores de cota y vuelo de γ^v y γ^h, respectivamente. Luego, aplicando la condición de pertenencia de punto a plano, es

posible encontrar la proyección horizontal del vértice A empleando una recta cualquiera “m” contenida en γ.

Fig. 5.16-b

Una vez determinado el eje de giro “e” (recta de pie de abcisa 50 mm y vuelo 25 mm) se procede a hallar las trazas del plano γ’ y la doble proyección ortogonal de A’; ambos elementos corresponden a las nuevas posiciones del plano γ y del punto A, respectivamente. Para ello se traza por A y una recta perpendicular al eje de rotación, la cual tiene una posición horizontal, y se dibuja un cuarto de circunferencia con centro en la proyección horizo0ntal de dicho eje, puesto que el giro de cada uno de los elementos del plano objetivo debe girar un ángulo de 90° para lograr un nuevo plano que sea proyectante vertical. Para encontrar la traza horizontal del plano γ’ es conveniente realizar el giro del punto P, el cual se ubica sobre la traza horizontal de γ y sobre la recta de máxima pendiente de éste plano que corta al eje de rotación; esta operación da lugar al punto P’, por el cual pasa la traza horizontal (de punta) del plano γ’. La traza vertical de este nuevo plano queda definida por P'^{v} y A'^{v} (Fig. 5.16-a).

El siguiente paso es la segunda etapa del giro, esta vez en torno a una recta de punta. En aras de la simplificación del procedimiento se ha tomado como segundo eje de giro la traza horizontal del plano γ’, de manera que el resultado es el abatimiento de este plano sobre PH,

generando un nuevo punto A’’. Partiendo de la proyección horizontal de A’’ es posible dibujar el hexágono regular A’’B’’C’’D’’E’’F’’, ya que este polígono se encuentra sobre el plano horizontal de proyección y, en consecuencia, en verdadero tamaño. Para ello es necesario construir un arco de centro en A’’^{h} y radio 25 mm (lado del hexágono) que corta a γ'^h en B’’^{h} (recuérdese que Y’^{h} es el eje de giro de la segunda etapa, por lo que no cambia de posición). Una vez conocido uno de los lados del hexágono se realiza el trazado del resto de los lados del polígono (Fig. 5.16-b).

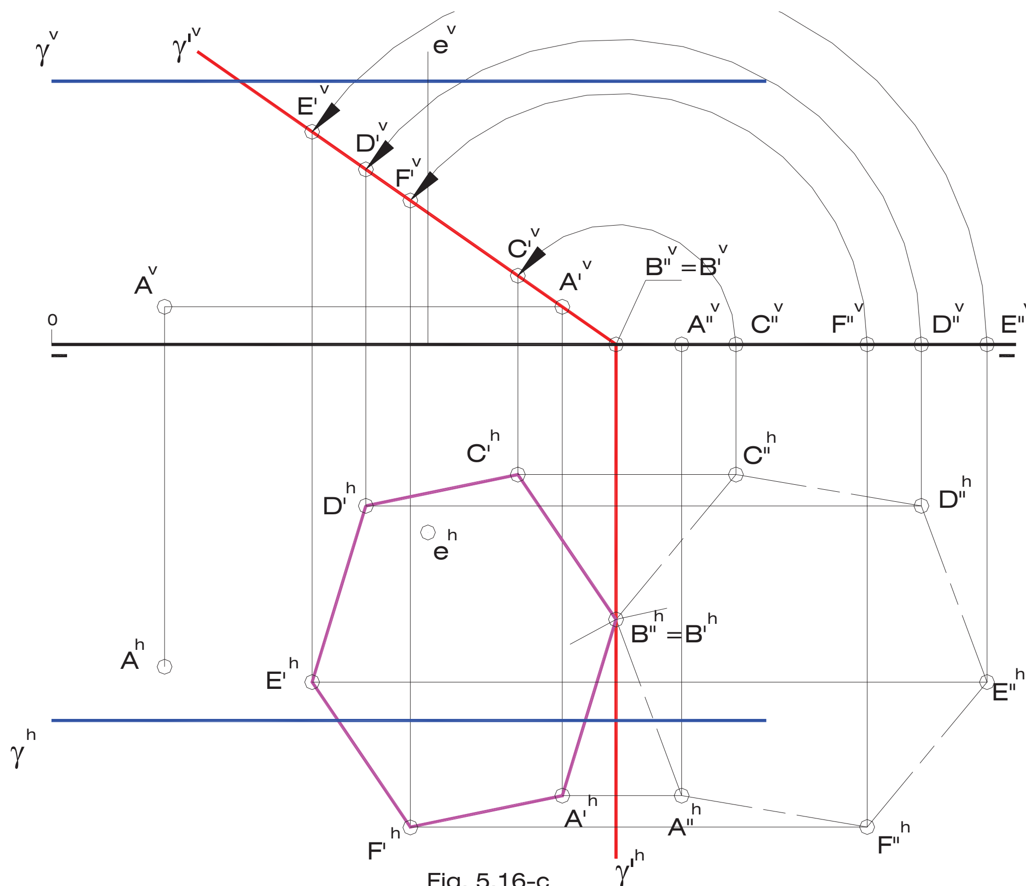


Fig. 5.16-c

Siguiendo un procedimiento inverso con respecto al empleado para obtener el punto A’’, se obtiene la doble proyección ortogonal de los puntos B’, C’, D’, E’ y E’: las proyecciones verticales sobre la traza vertical del plano γ' y las proyecciones horizontales formando un hexágono irregular (Fig. 5.16-c). Para encontrar las proyecciones horizontales de los vértices del hexágono pedido se construyen cuartos de circunferencia de centro en la proyección horizontal del primer eje de giro “e” y de radios e^{h}B’^{h}, e^{h}C’^{h}, e^{h}D’^{h}, e^{h}E’^{h} y e^{h}F’^{h}. Luego, en los cortes entre las referencias perpendiculares a LT correspondientes a B, C, D, E y F y unas paralelas a LT trazadas por las proyecciones verticales de los puntos B’, C’, D’, E’ y F’, respectivamente, se obtienen las proyecciones verticales de aquellos puntos, con lo cual se completa la doble proyección ortogonal del hexágono ABCDEF, contenido en el plano paralelo a la línea de tierra γ.

Resulta evidente que la aplicación del giro a la determinación del verdadero tamaño de una figura plana, contenida en planos en posición accidental y paralelos a la línea de tierra, conlleva a un procedimiento sustancialmente más largo y engorroso que el que debe

seguirse si se aplicara abatimiento. Por este motivo no se hace mayor énfasis en el estudio y en la ejecución de problemas empleando este método, en la mayor parte de los cursos formales de Sistemas de Representación dictados en la Universidad de Los Andes.

Lo más conveniente es dejar en manos del estudiante la decisión de cuál método indirecto emplear, previo el razonamiento y evaluación de las características que presenta un ejercicio en particular.

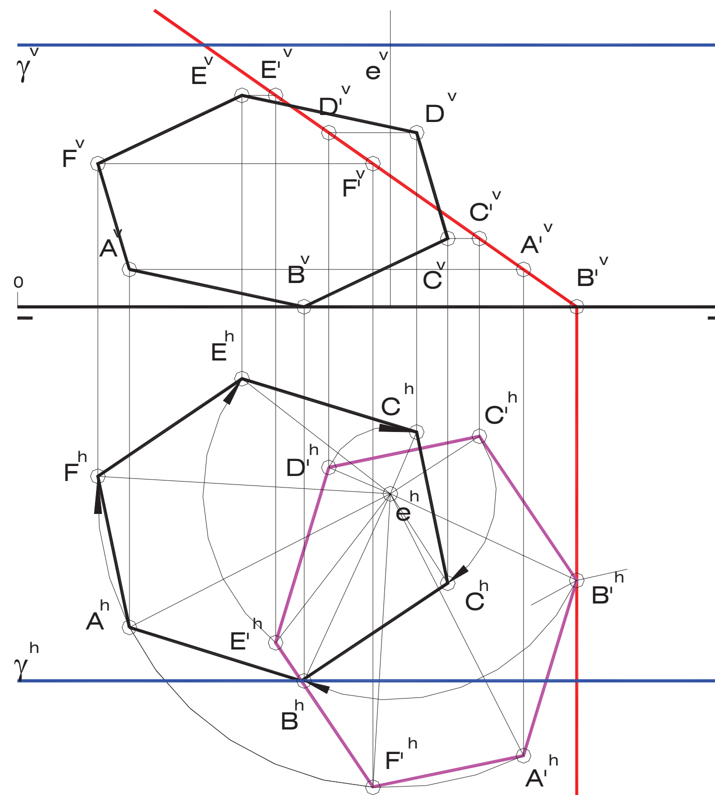


Fig. 5.16-d

5.3 Ejercicios resueltos de Relaciones Geométricas

1) Construya la doble proyección ortogonal de los siguientes elementos geométricos:

- Una recta "m" paralela a los planos δ y γ que pase por el punto A.
- Un plano π perpendicular a los planos δ y γ y que pase por el punto A.
- La recta de intersección entre los planos δ y π.
- La recta de intersección entre los planos γ y π.

$$\delta\begin{Bmatrix}1(35,25,00)\\2(25,00,30)\\3(60,00,00)\end{Bmatrix}\ \gamma\begin{Bmatrix}4(10,20,00)\\5(55,00,40)\\6(30,00,00)\end{Bmatrix}\ A(40,20,25)$$

Solución (Fig. 5.17)

Los puntos que definen al plano δ permiten la construcción directa de sus trazas, puesto que uno de ellos (el punto 1) se encuentra sobre el plano horizontal, otro (el punto 2) se sitúa sobre el plano vertical y el tercero (el punto 3) pertenece a la línea de tierra. La misma situación se presenta con el plano γ.

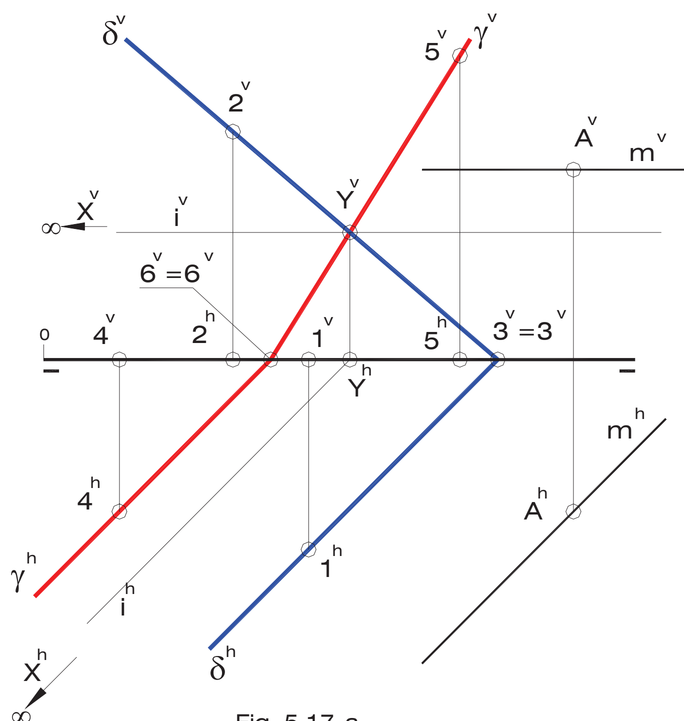


Fig. 5.17-a

Dado que la recta "m" es paralela a ambos planos δ y γ, debe ser paralela a la recta de intersección de estos planos, recta ésta que se define por los puntos X y Y, comunes a las trazas homónimas de δ y γ. Como las trazas horizontales de ambos planos son paralelas entre sí el punto X es impropio (se encuentra en el infinito), lo cual implica que la recta de intersección "i" entre los planos δ y γ es una recta horizontal, paralela también a las trazas horizontales de estos planos.

Así pues, las proyecciones diédricas de la recta “m” serán paralelas a las proyecciones homónimas de la recta “i” y pasarán por las proyecciones homónimas del punto A (Fig. 5.17-a).

Siendo “m” una recta horizontal, el plano π debe tener una posición proyectante horizontal, pues en el enunciado se especifica que π es perpendicular a la recta “m”. Por tal motivo, la traza horizontal de este plano pasa por A^h y forma 90° con m^h; luego, la traza vertical se dibuja por el punto de corte entre π^h y la línea de tierra, en forma perpendicular a ésta.

Para encontrar las rectas de intersección entre el plano π y los planos δ y γ, es decir, las rectas i_1 e i_2, respectivamente, bastará con encontrar los puntos comunes a las trazas homónimas. Así, el punto Q, común a las trazas horizontales de π y δ y P, punto de corte entre las trazas verticales de esos mismos planos, definen la recta de intersección i_1. De manera análoga, los puntos S (corte entre las trazas horizontales de π y γ) y R (punto común a las trazas horizontales de π y γ) determinan la recta de intersección i_2 (Fig. 5.17-b).

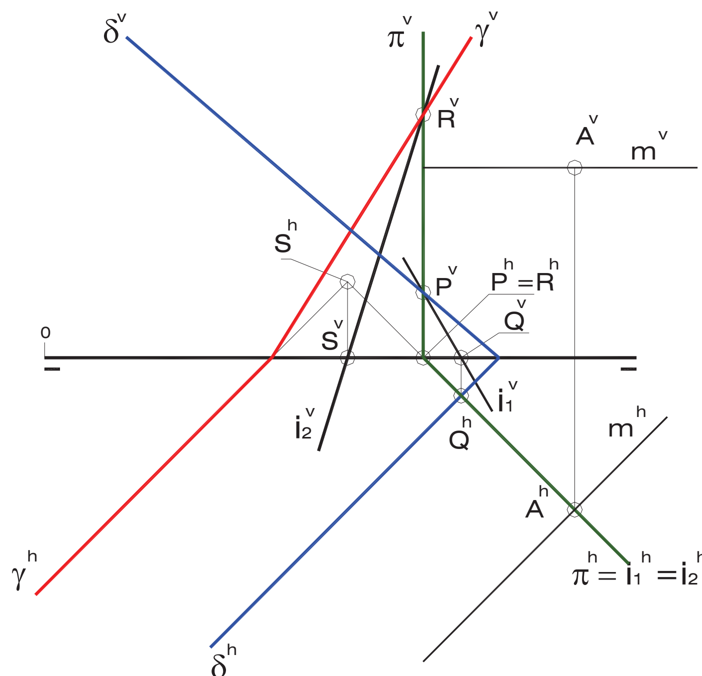


Fig. 5.17-b

2) Determine las proyecciones diédricas de la recta de intersección producida entre los planos δ y γ, sabiendo que es paralela al plano horizontal. Analice e indique la visibilidad.

$$\delta\begin{cases} A(10,25,15) \\ B(32,50,50) \\ C(50,30,35) \end{cases} \qquad \gamma\begin{cases} P(08,??,35) \\ Q(25,15,45) \\ R(45,30,35) \end{cases}$$

Solución (Fig. 5.18)

En los datos del ejercicio puede observarse cómo el plano γ no está determinado, pues únicamente se conocen las proyecciones diédricas de dos de los puntos Q y R y la

proyección vertical de P. Sin embargo, se conoce la posición de la recta de intersección – paralela al plano horizontal de proyección horizontal de proyección – lo que permite hallarla sabiendo que pertenece al plano δ, plano éste que está perfectamente definido por los puntos A y B.

Ahora bien, no se conoce ninguno de los puntos de la recta de intersección entre los planos δ y γ, pero es posible encontrar uno de ellos si se determina el punto de intersección entre la recta QR y el plano δ. Para ello se ha aplicado el método del plano proyectante, considerando la existencia de una recta "t" perteneciente a δ y cuya proyección vertical coincide con la proyección vertical de la recta definida por el segmento QR. Dicha recta "t" corta a los segmentos AB y AC en los puntos 1 y 2, respectivamente, por lo que las proyecciones horizontales de estos puntos – 1^h sobre A^hB^h y 2^h sobre A^hC^h – determinan la proyección horizontal de la recta "t"; luego, el punto de corte entre "t" y la recta definida por el segmento QR viene a ser el punto de intersección buscado (X en la figura 5.18-a).

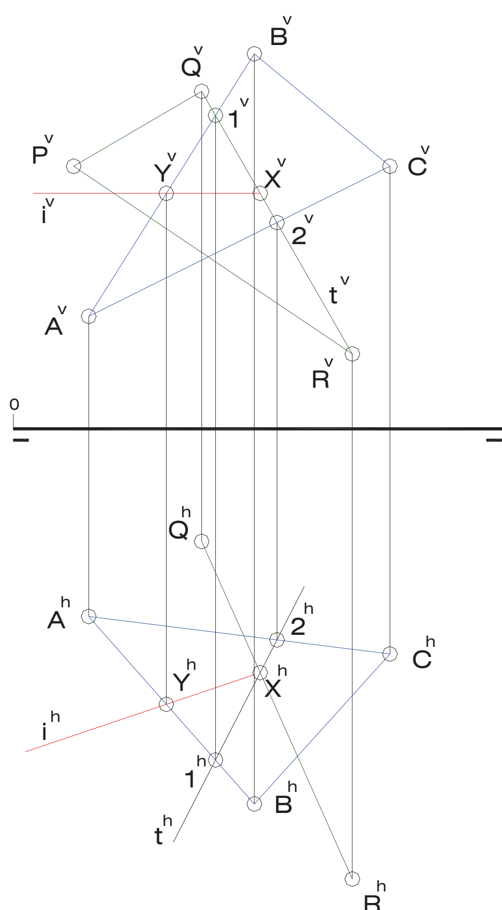


Fig. 5.18-a

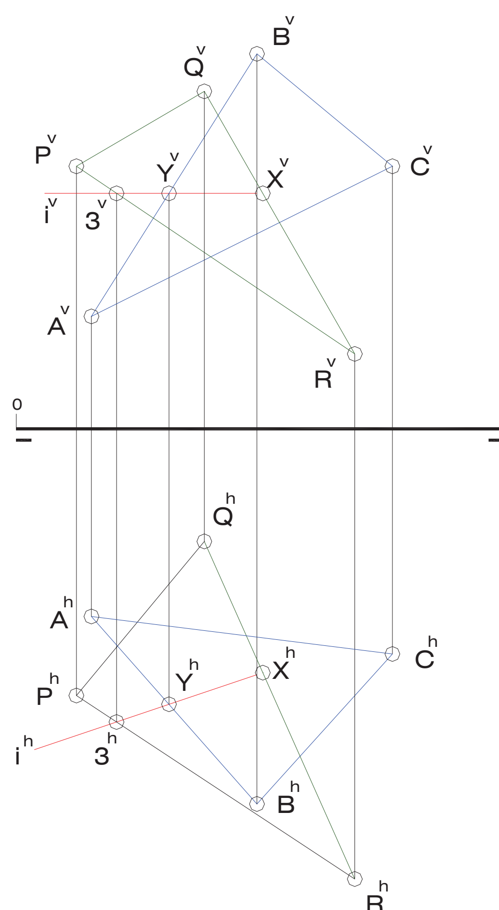


Fig. 5.18-b

Seguidamente se construye la recta de intersección "i" entre los planos δ y γ, es decir, una recta horizontal que pase por el punto X y pertenezca al plano δ, comenzando por el trazado de la proyección vertical, la cual es paralela a LT . Luego, buscando el punto de corte entre i^h y la proyección horizontal de una recta cualquiera del plano δ - punto Y en la Fig. 5.18-a – se completa la proyección vertical de "i", determinada por la proyección vertical de dicho punto y por X^v.

La recta "i" define junto a la recta QR al plano γ, por lo que es posible ahora encontrar la proyección faltante del punto P. Para ello se ubica el punto 3^v común a las proyecciones verticales de la recta "i" y del segmento PR; luego, se busca la proyección horizontal de 3 sobre la proyección horizontal de "i", de manera que al unir R^h con 3^h se obtiene la proyección horizontal de segmento RP (Fig. 5.18-b).

Para determinar la visibilidad del conjunto en la proyección horizontal se ha tomado a los segmentos BC y QR como objetos del análisis. El corte entre las proyecciones horizontales de ambos segmentos representa a 4^h (sobre BC) y 5^h (sobre QR). En vista de que el punto 4 tiene mayor cota que 5, se concluye que el triángulo ABC se encuentra por encima del triángulo PQR del lado de i^h en el que se encuentran 4^h y 5^h; del otro lado de la proyección horizontal de "i" tal situación se invierte (Fig. 5.18-c).

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior – puntos 6 y 7 en la Fig. 5.18-c - se realiza el análisis de la visibilidad del conjunto formado por los triángulos ABC y PQR en la proyección vertical.

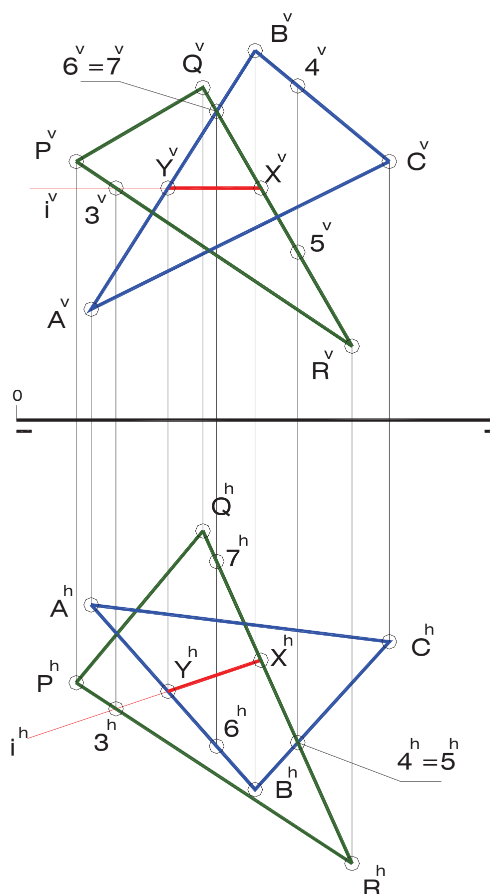


Fig. 5.18-c

3) Determine la menor distancia entre el punto A y la recta de intersección entre los planos δ y γ.

$$\delta\begin{cases}1(20,25,00)\\2(10,00,30)\\3(45,00,00)\end{cases}\gamma\begin{cases}4(80,00,30)\\5(10,15,00)\\3(45,00,00)\end{cases}A(30,26,25)$$

Solución (Fig. 5.19)

El primer paso en la resolución de este problema es, evidentemente, la determinación de la recta de intersección entre los planos dados. Es un hecho cierto que el punto 3 es uno de los puntos de la mencionada recta, pues constituye el origen de trazas de ambos planos. Sin embargo, no es posible encontrar de manera directa algún otro punto sobre la recta de intersección de los planos δ y γ, de manera que se hace necesario buscar otras rectas en cada plano o construir un plano paralelo a uno de los originales; ésta última operación es la que se ha llevado a cabo, como se muestra en la Fig. 5.19-a.

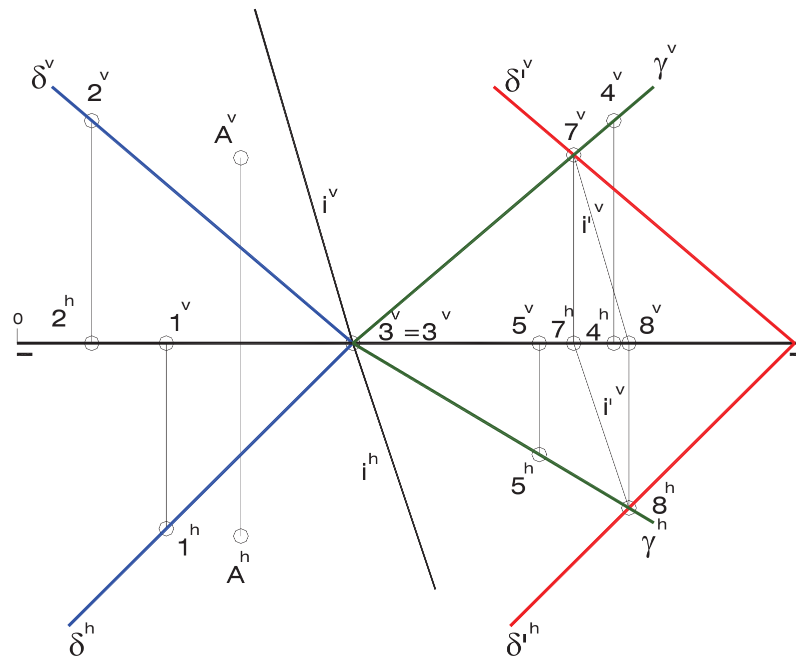


Fig. 5.19-a

La recta de intersección – definida por los puntos 7 y 8 – "i'" entre el plano γ y un plano δ', paralelo a aquél, es paralela a la recta de intersección "i" entre δ y γ, pues las rectas de intersección entre dos planos paralelos entre sí y un tercer plano son siempre paralelas.

Así pues, se construyen las proyecciones diédricas de la recta "i" paralelas a las proyecciones homónimas de "i'", pasando por las proyecciones del punto 3.

La menor distancia entre el punto A y la recta "i" se mide sobre una recta "p" perpendicular a "i" que pase por A. Para construir esta recta "p" es necesario construir un plano perpendicular a la recta "i" que pase por el punto A; este plano contiene a todas las rectas del espacio que pasan por A y forman ángulo recto con la recta "i", y se genera mediante una recta frontal "f" y una horizontal "h", ambas perpendiculares a "i".

El punto de intersección K entre la recta "i" y el plano formado por "f" y "h" es también el punto común a "i" y a la recta "p". Luego, el verdadero tamaño – determinado aplicando abatimiento – del segmento AK es la menor distancia buscada.

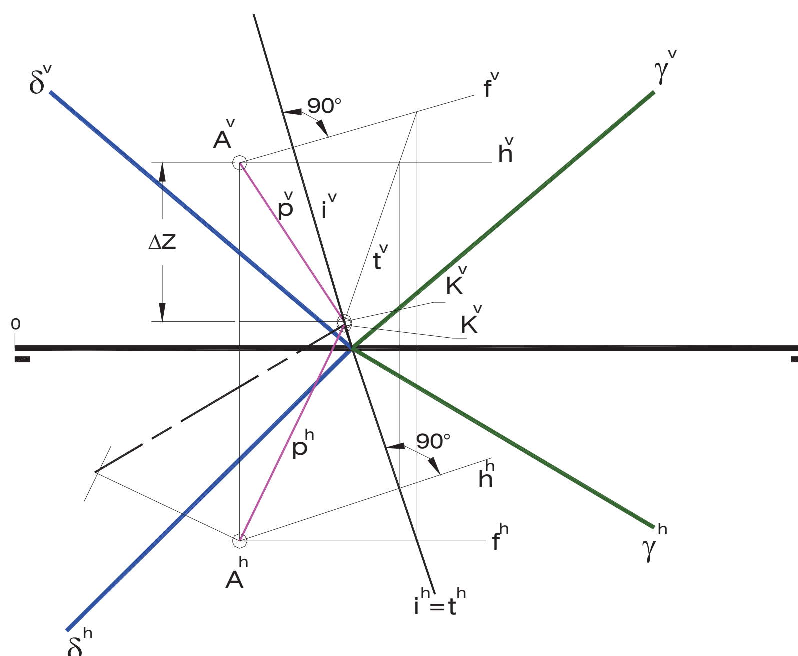


Fig. 5.19-b

4) Determine el ángulo formado entre la recta “m” y el plano δ.

$$\delta\begin{cases}1(20,25,00)\\2(10,00,30)\\3(45,00,00)\end{cases}\qquad m\{A(15,-05,35);B(40,26,35)\}$$

Solución (Fig. 5.20)

El primer paso en la resolución de este problema es la construcción de un plano π perpendicular a δ que contenga a la recta “m”. Para ello se construye por cualquier punto de esta recta – B en la Fig. 5.20-a - una recta “p” perpendicular al plano δ, recta ésta que define junto a la reta “m” al nuevo plano π.

El ángulo ϕ formado entre “m” y δ es igual al que se forma entre la recta “m” y la recta de intersección entre los planos δ y π. Para hallar esta recta bastará con encontrar los puntos de intersección entre las rectas “p” y “m” y el plano δ, I y K respectivamente, lo cual se ha realizado aplicando el método del plano proyectante (Fig. 5.20-a y 5.20-b).

Dado que el plano π resulta ser oblicuo con respecto a ambos planos de proyección, resulta imprescindible construir una nueva proyección para obtener el ángulo ϕ en verdadera magnitud. Como la recta “m” es una recta en posición horizontal es posible tomarla como eje de abatimiento, en torno a la cual gira el punto I para producir la proyección I^R. Luego, en vista de que K se halla sobre el eje de abatimiento, K^R coincide con K^h, por lo que el verdadero tamaño de ϕ es el ángulo formado entre el segmento K^RI^R y m^R, ésta última proyección coincidente con m^h (Fig. 5.20-c).

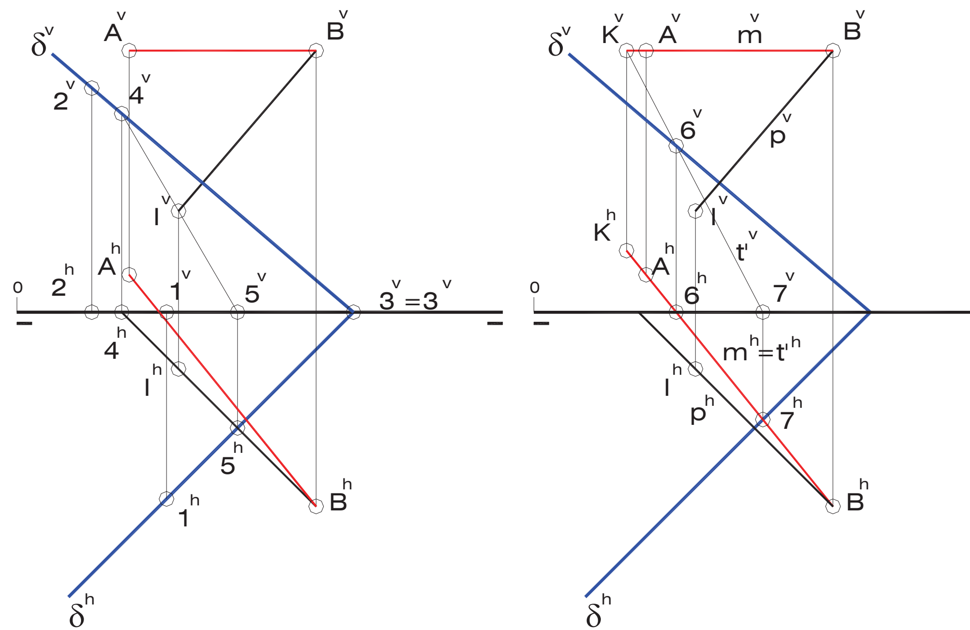


Fig. 5.20-a

Fig. 5.20-b

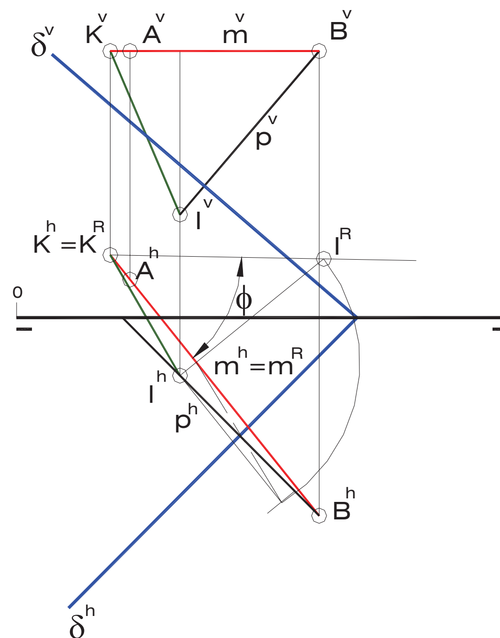


Fig. 5.20-c

5) Determine la doble proyección ortogonal de la recta perpendicular común a las rectas “a” y “b”. Aplique el primer método.

$a\{A(19,32,51); B(52,05,30)\}$

$b\{C(15,-05,31); B(45,22,12)\}$

Solución (Fig. 5.21)

La aplicación del primer método - expuesto en el Capítulo III – para encontrar la perpendicular común a dos rectas, consiste en la construcción de un plano δ paralelo a una de dichas rectas y que contenga a la otra. Para ello se dibujan las proyecciones de una recta "c", que pase por un punto cualquiera X de la recta escogida ("b" en la Fig. 5.21-a), paralelas a las proyecciones homónimas de la otra recta ("a"); el plano determinado por "b" y "c" es el plano δ. En vista de que las proyecciones verticales de las rectas "b" y "c" se confunden, se deduce que el plano por ellas formado es proyectante vertical.

A continuación se selecciona un punto cualquiera de la recta "a" – recta que no pertenece al plano δ - y se construye por ese punto una recta una recta "m" perpendicular a la plano δ, recta ésta que resulta ser frontal en el ejercicio, dado que, como ya se ha indicado, el plano δ es proyectante vertical. Dicha recta "m" posee la dirección de la perpendicular común a las rectas "a" y "b". Seguidamente, se procede a determinar el punto de intersección I entre la recta "m" y el plano δ (Fig. 5.21-b).

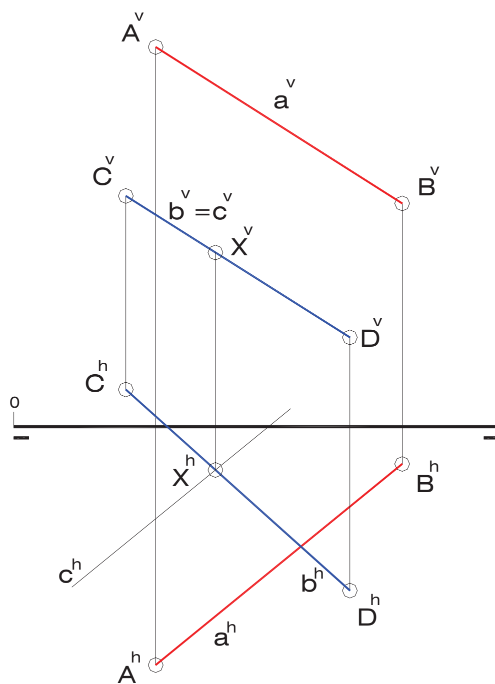


Fig. 5.21-a

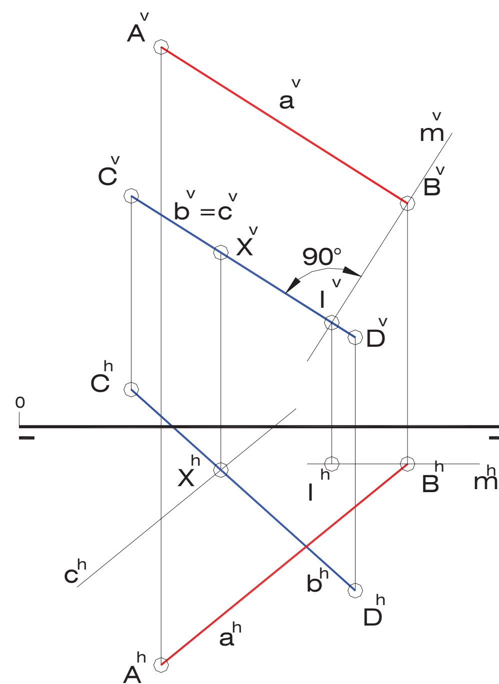


Fig. 5.21-b

A continuación se construye una recta "d" que sea paralela a la recta "a" y pase por el punto de intersección I entre la recta "m" y el plano δ. Dicha recta "d" corta a la recta "b" en el punto R, por el cual pasa la perpendicular común "p" paralela a la recta "m".

El punto Q, común a las rectas "p" y "a", define, junto con el punto R al segmento de la perpendicular común cuya longitud es igual a la menor distancia que hay entre las rectas "a" y "b". Siendo la recta "p" una recta frontal en el ejercicio, el verdadero tamaño de esa distancia no es más que la proyección vertical del segmento QR.

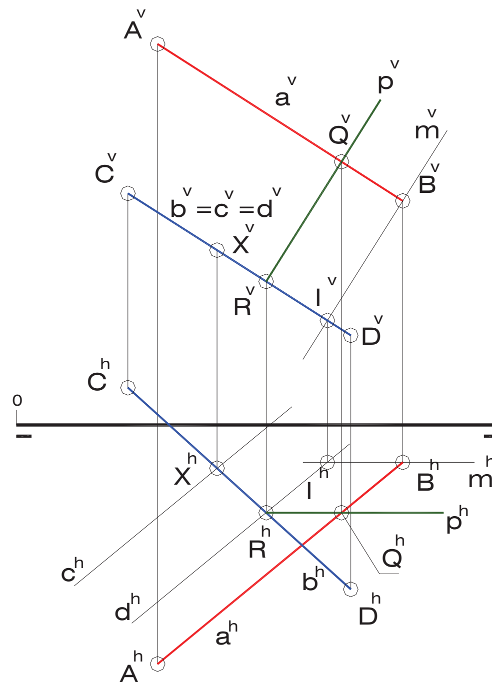


Fig. 5.21-c

6) Determine las proyecciones diédricas de un triángulo isósceles ABC, sabiendo que:

- El lado AB es paralelo al plano γ, forma 45° con PH y mide 30mm (B a la derecha de A y de menor cota y mayor vuelo que éste).
- Los lados iguales del triángulo son AC y BC.

$$\gamma\begin{cases}1(50,15,00)\\2(60,00,30)\\3(25,00,00)\end{cases}\qquad A(10,15,40)\qquad C(45,20,??)$$

Solución (Fig. 5.22)

En primer lugar hay que determinar una recta "r" que forme 45° con PH y pertenezca al plano γ, ya que si el lado AB es paralelo a γ también lo será con respecto a una de sus rectas. En el ejemplo existen dos direcciones posibles para "r" de las cuales se toma aquélla que sea descendente hacia atrás de izquierda a derecha, pues es la solución que permite obtener al punto B siguiendo la orientación del enunciado, según la cual B se encuentra a las derecha de A y de menor cota y vuelo que éste (Fig. 5.22-a).

Seguidamente, se construye una recta "m" paralela a "r" por el punto A, sobre la cual se ha de encontrar el punto B midiendo 30mm a partir de A y a su derecha. Esta operación debe ser realizada en verdadero tamaño, abatiendo previamente un segmento AP de la recta "m", en el que P es un punto arbitrario (Fig. 5.22-b).

En vista de que los lados AC y BC del triángulo son iguales, es posible afirmar que el vértice C equidista de A y B y, en consecuencia, se encuentra sobre el plano mediador μ del segmento AB. Este plano, determinado por las rectas notables "f" y "h" en la Fig. 5.22-c, pasa por el punto medio M de dicho segmento y es perpendicular a él. Finalmente, es posible hallar las proyecciones diédricas de C partiendo de los valores de sus coordenadas y

Y, sabiendo que pertenece al mencionado plano mediador de AB; esto se ha realizado empleando la recta frontal del plano μ que pasa por el punto C.

Fig. 5.22-a

Fig. 5.22-b

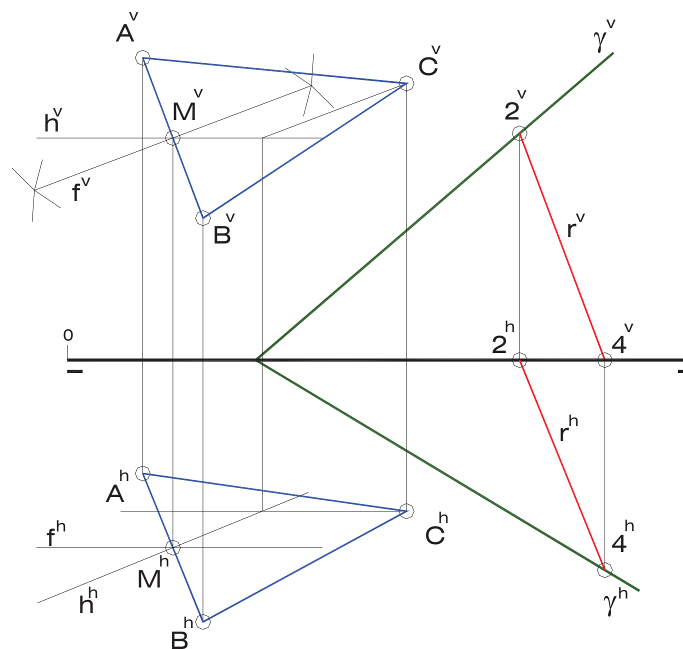


Fig. 5.22-c

5.4 Ejercicios resueltos de Poliedros

1) Determine la doble proyección ortogonal de un prisma recto de base triangular equilátera ABC contenida en el plano γ, sabiendo que la circunferencia que circunscribe a dicha base es tangente a las trazas de γ. Tome la solución de mayor radio para esta circunferencia. Analice e indique la visibilidad del poliedro.

$$\gamma\begin{cases}1(35,20,00)\\2(45,00,30)\\3(10,00,00)\end{cases}\qquad A_1(05,45,55)$$

Solución (Fig. 5.23)

Dado que las aristas laterales del prisma son perpendiculares al plano que contiene a la base ABC, el vértice A se encuentra en la intersección entre una recta perpendicular al plano γ y éste último (Fig. 5.23-a).

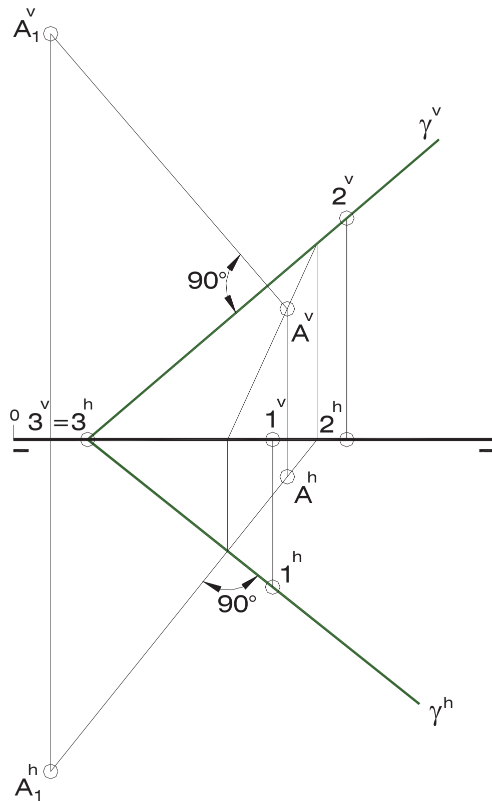


Fig. 5.23-a

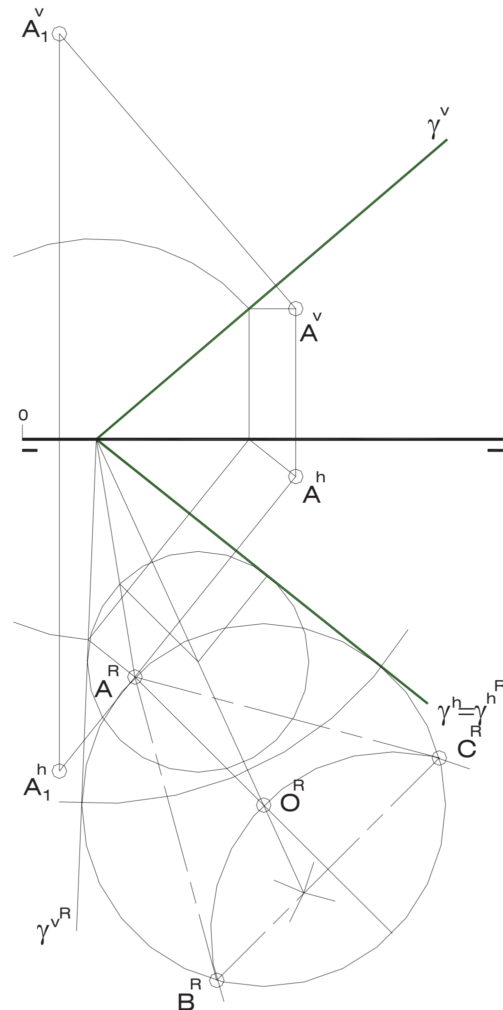


Fig. 5.23-b

Una vez conocido el punto A y abatido el plano γ sobre uno de los planos de proyección es posible realizar el trazado, en verdadero tamaño, de la circunferencia que circunscribe al triángulo ABC, pues se sabe que pasa por A^R y que es tangente a las trazas abatidas del plano γ. Para ello se ha seguido el procedimiento mostrado en el numeral siete del apartado A.3.3 del Apéndice (Construir una circunferencia que es tangente a las rectas "t" y "s" y pasa por un punto A), como se puede observar en la Fig. 5.23-b.

Las proyecciones diédricas de los vértices B y C se han hallado mediante el trazado de las proyecciones de las rectas horizontales del plano γ que pasan por los puntos señalados (Fig. 5.23-c). El resto de los vértices del prisma se obtienen aplicando paralelismo entre rectas. Finalmente es necesario determinar cuáles son las aristas invisibles en ambas proyecciones: AC en proyección horizontal, ya que C es el vértice de menor cota, y AB en proyección vertical, en vista de que A es el vértice de menor vuelo (Fig. 5.23-d).

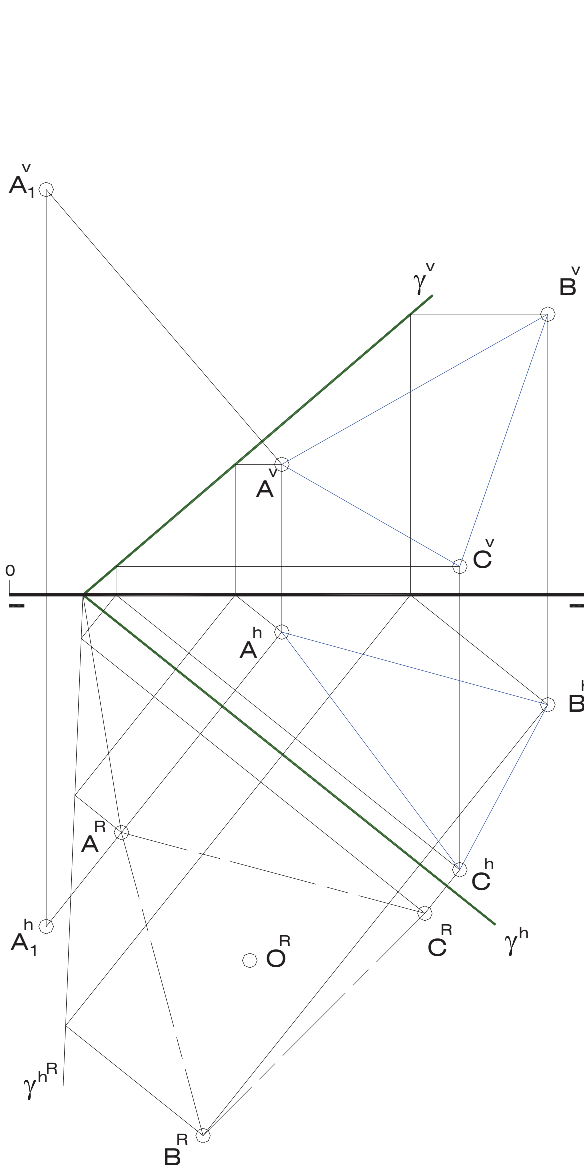


Fig. 5.23-c

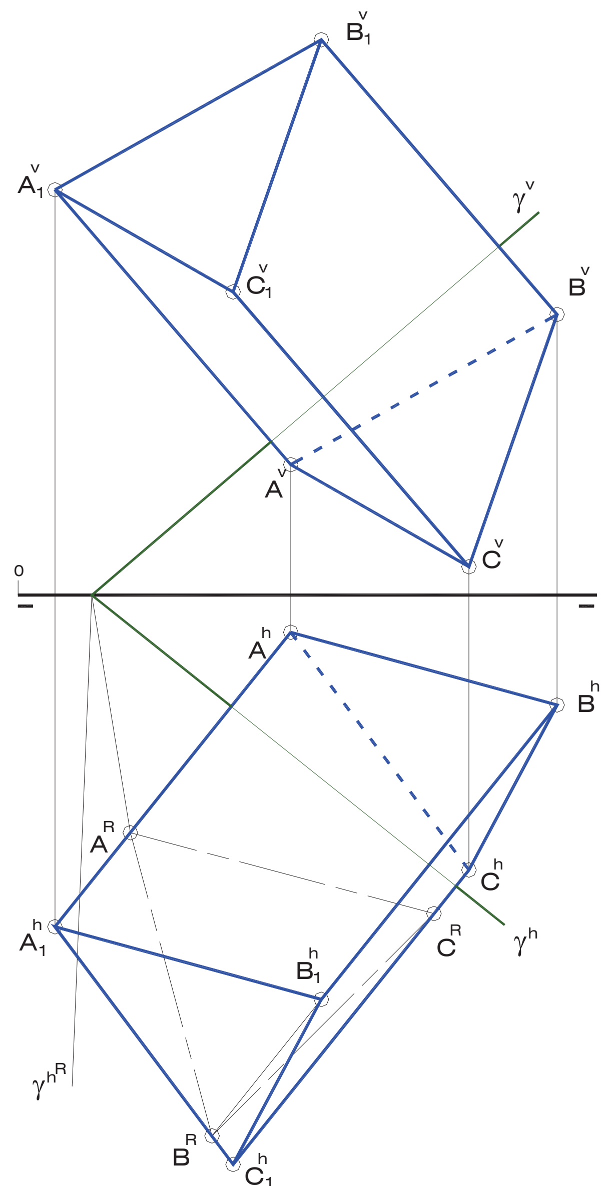


Fig. 5.23-d

2) Construya la doble proyección ortogonal de un prisma recto de base cuadrada ABCD, sabiendo que el punto X se encuentra sobre la arista C_1D_1. D de mayor vuelo que A. Analice e indique la visibilidad del sólido.

$$A(38,24,00) \quad B(13,40,20) \quad X(58,47,40)$$

Solución (Fig. 5.24)

La arista de bese superior C_1D_1, sobre la cual se encuentra el punto X, pertenece a una recta "m" paralela al segmento AB. Es posible construir el plano que contiene a la cara lateral ADA_1D_1 del prisma, ya que este plano π pasa por A y es perpendicular a AB; luego, el resultado de la intersección entre la recta "m" y el plano π es el vértice de base superior D_1, tal y como se muestra en la Fig. 5.24-a.

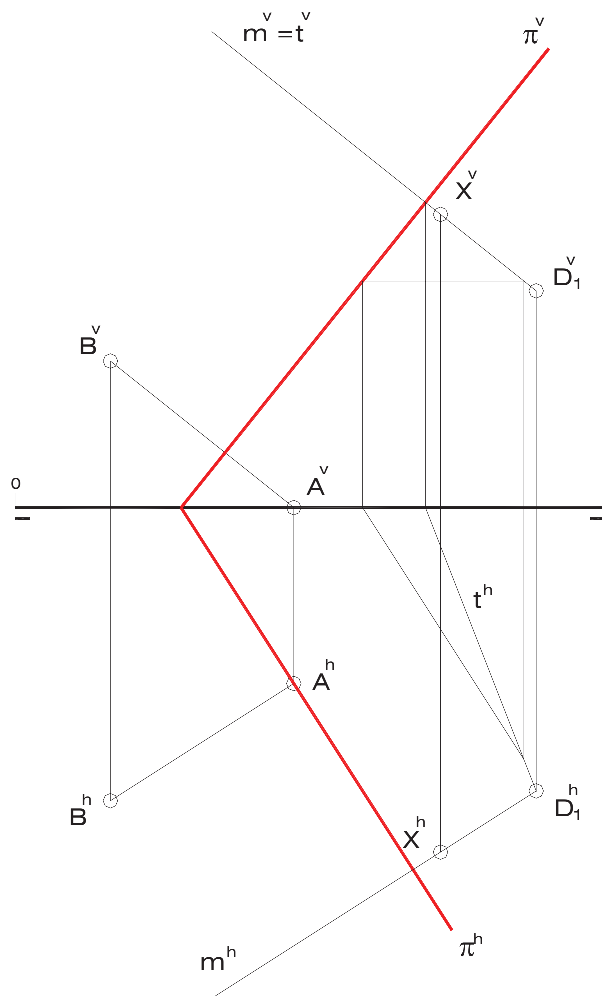


Fig. 5.24-a

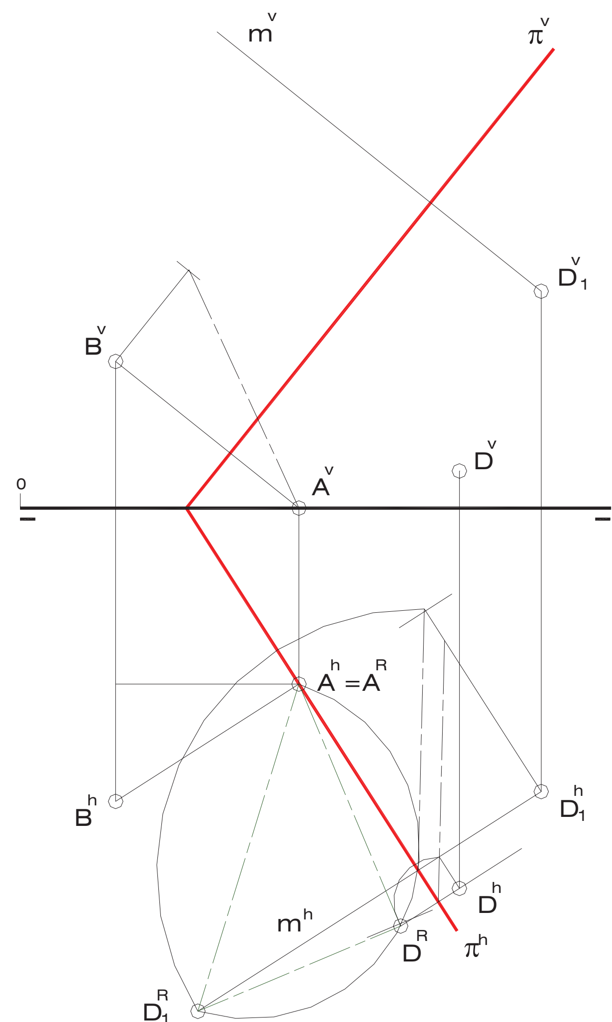


Fig. 5.24-b

Para construir la cara lateral ADA_1D_1 es necesario aplicar un método indirecto – abatimiento en el ejemplo – que permita obtener el verdadero tamaño de cualquier figura contenida en el plano π. Siendo dicha cara lateral un rectángulo, es seguro que D^R se halla sobre una semicircunferencia de diámetro igual al segmento $A^RD_1^R$, ya que esta semicircunferencia es

el arco capaz de 90°. Por otra parte, la longitud de la arista AD es la misma que la de la arista AB, la cual se ha encontrado aplicando abatimiento de segmentos de recta, de manera que si se traza un arco de centro en A^R y radio igual a esta longitud se obtiene, en el corte con la semicircunferencia, a D^R. Es preciso asegurarse de obtener la solución que el enunciado indica, es decir, aquella en la que el vértice D es de mayor vuelo que A (Fig. 5.24-b).

Una vez encontrada la doble proyección ortogonal de D, se procede a hallar la de los demás vértices del poliedro aplicando paralelismo entre rectas (Fig. 5.24-c).

Finalmente, debe realizarse el análisis de visibilidad correspondiente, del cual se desprende que el vértice de menor cota es A, por lo que las proyecciones horizontales de las aristas convergentes en A se dibujan con línea de trazos, al igual que las proyecciones verticales de las aristas convergentes en A_1, por ser éste el vértice de menor vuelo (Fig. 5.24-d).

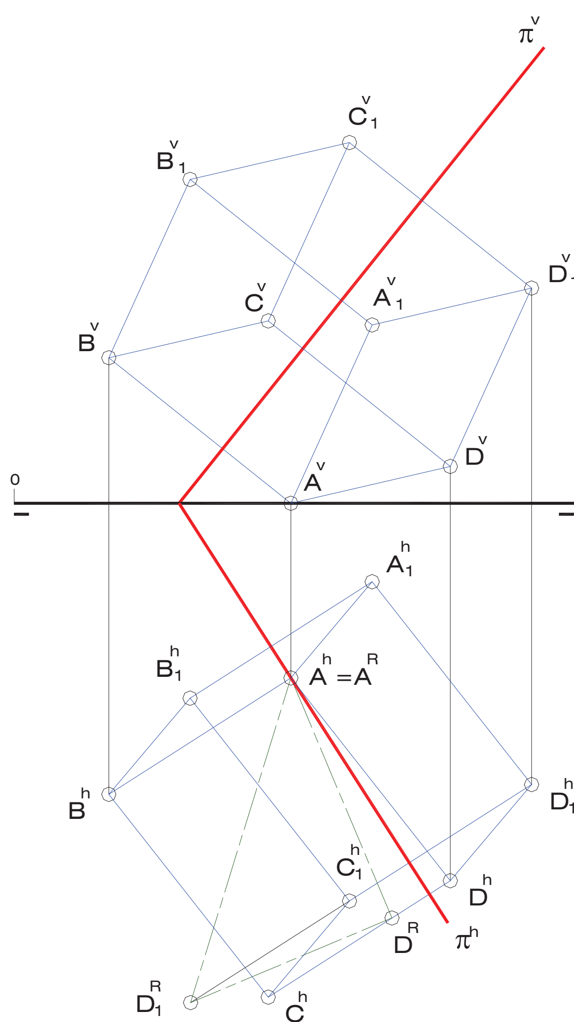


Fig. 5.24-c

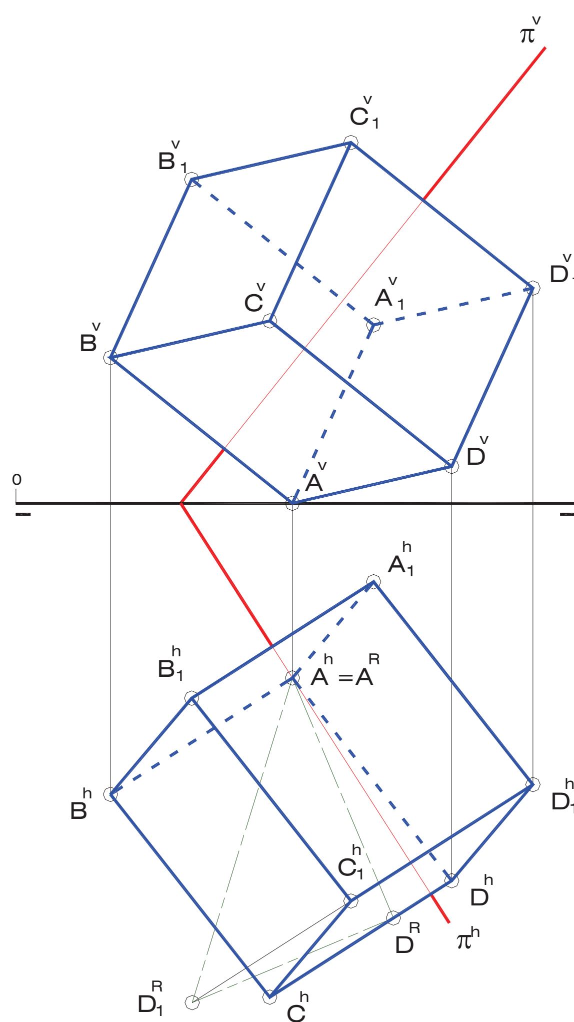


Fig. 5.24-d

3 Construya la doble proyección ortogonal de una pirámide recta de base pentagonal regular ABCDE apoyada en el plano δ, sabiendo que el punto V es el vértice principal del sólido y que el punto X se encuentra sobre la arista lateral AV. Analice e indique la visibilidad de las aristas de la pirámide.

$$\delta\begin{cases}1(63,00,50)\\2(47,38,00)\\3(23,00,00)\end{cases}\quad X(28,30,26)\quad V(13,50,50)$$

Solución (Fig. 5.25)

Es evidente que, dada la condición de sólido recto de la pirámide, el eje OV es perpendicular al plano δ, siendo O el punto de intersección entre dicho eje y δ. Por otra parte, como X se encuentra sobre la arista AV, A resulta ser la intersección entre la recta definida por los puntos V y X y el plano δ (Fig. 5.25-a).

Los puntos O y A hacen posible la construcción del verdadero tamaño del pentágono regular ABCDE, previo el abatimiento del plano que lo contiene sobre uno de los planos de proyección, el vertical en el ejemplo (Fig. 5.25-b).

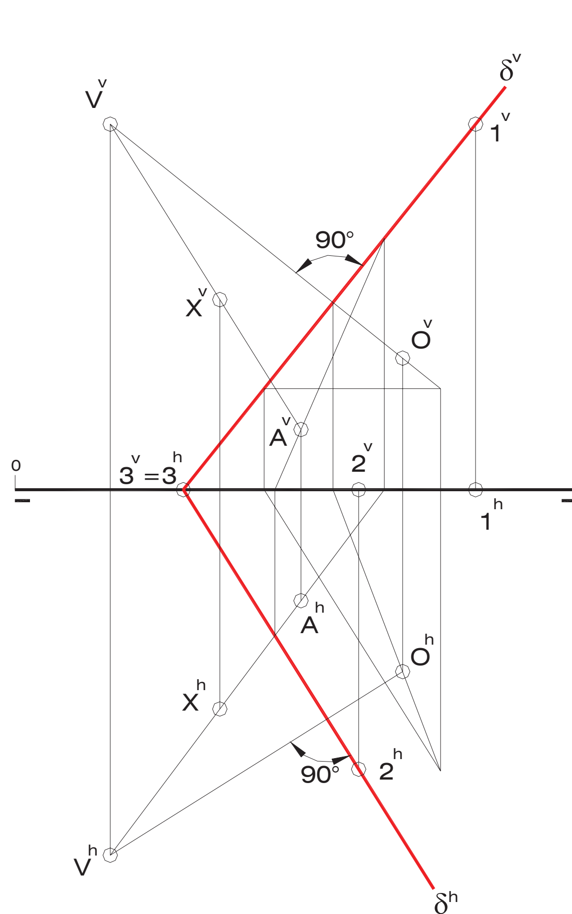


Fig. 5.25-a

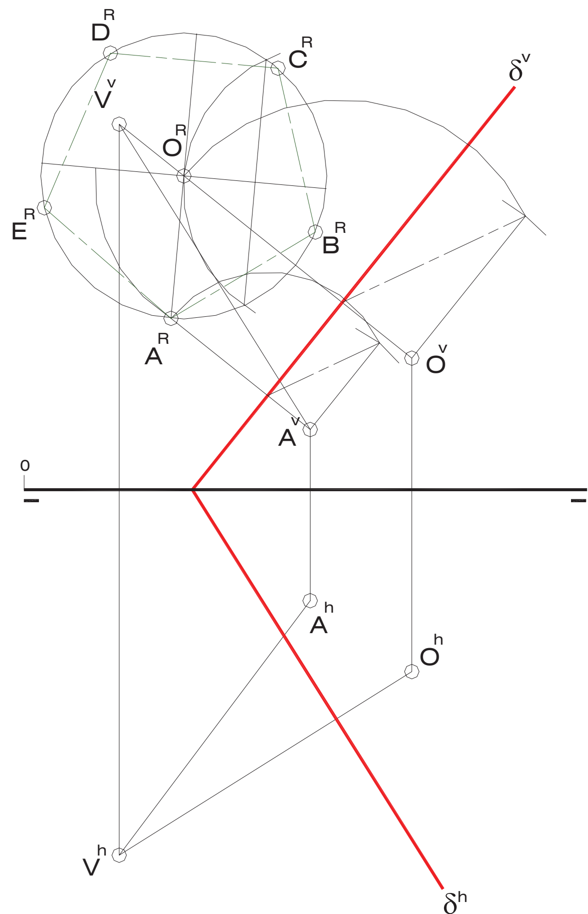


Fig. 5.25-b

Las proyecciones diédricas del polígono base de la pirámide, cuyos lados son las aristas básicas, quedan determinadas una vez que se hallan las proyecciones de los vértices B, C, D y E, lo cual se ha realizado siguiendo un procedimiento análogo al empleado para abatir los puntos A y O, pero en sentido inverso, tal y como se muestra en la Fig. 5.25-c.

Las aristas laterales del poliedro son los segmentos definidos por V y cada uno de los vértices básicos, con lo cual se completan los elementos constitutivos del sólido, quedando como último paso el análisis de visibilidad de las aristas. Siendo B el vértice de menor vuelo, las aristas que en él convergen son invisibles en proyección vertical; lo propio ocurre en la proyección horizontal con las aristas convergentes en el vértice E, ya que éste es el de menor cota (Fig. 5.25-d).

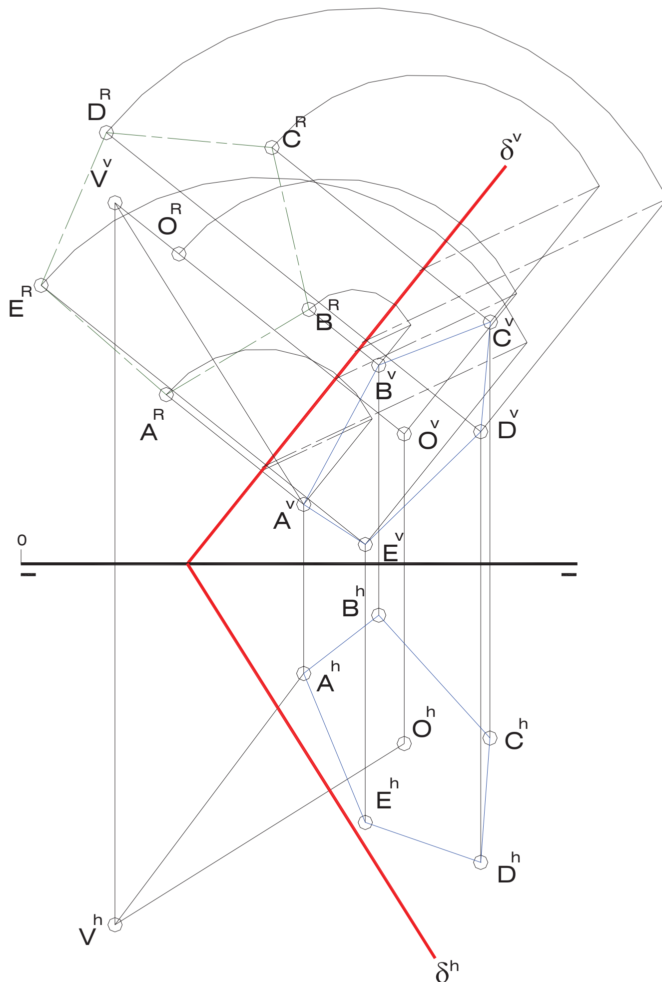


Fig. 5.25-c

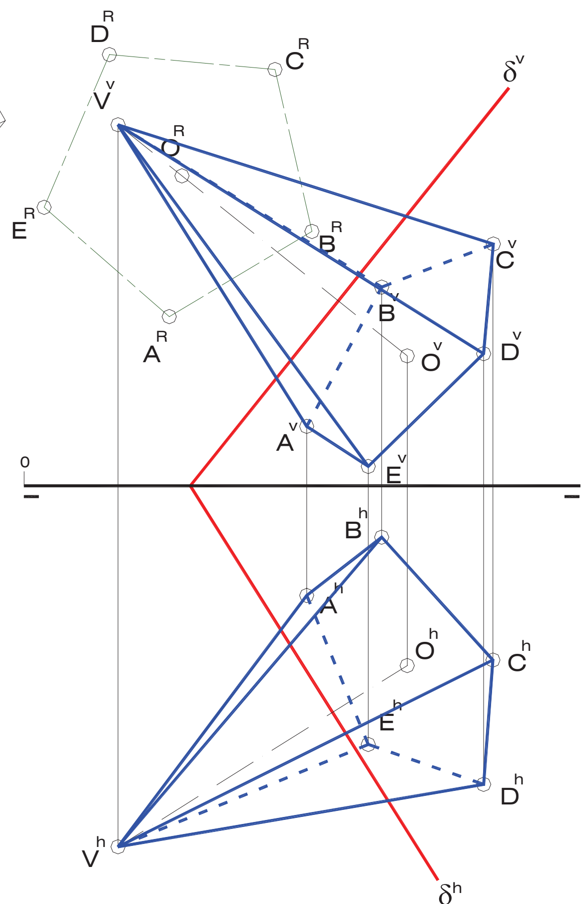


Fig. 5.25-d

4) Construya la doble proyección ortogonal de una pirámide recta de base hexagonal regular ABCDEF contenida en un plano δ que forma 45° con el plano horizontal de proyección (origen de trazas a la derecha). La altura del sólido es de 45mm. Analice e indique la visibilidad del poliedro

$$A(25{,}07{,}25) \quad D(40{,}28{,}05)$$

Solución (Fig. 5.26)

El plano δ que contiene al hexágono ABCDEF pasa por la recta definida por el segmento AD (diagonal del hexágono) y forma un ángulo de 45° con PH, por lo que debe ser tangente a un cono de vértice en un punto cualquiera de la recta definida por AD – A en el ejemplo – y de

base sobre PH, cuyas generatrices forman un ángulo de 45° con éste plano. En consecuencia, la traza horizontal de δ debe pasar por el punto de traza horizontal de la recta definida por AD y ser tangente a la circunferencia base del mencionado cono. De las dos posibles soluciones se ha tomado la que produce el origen de trazas a la derecha (Fig. 5.26-a).

Si se conoce la diagonal AD del hexágono es posible encontrar el resto de sus vértices. Para hacerlo se ha abatido el plano δ y se ha trazado el hexágono $A^RB^RC^RD^RE^RF^R$, verdadero tamaño del hexágono buscado (Fig. 5.26-b). Casualmente resulta que los lados CD y FA, así como también la diagonal BE, son horizontales, lo cual facilita en gran medida la obtención de las proyecciones del polígono.

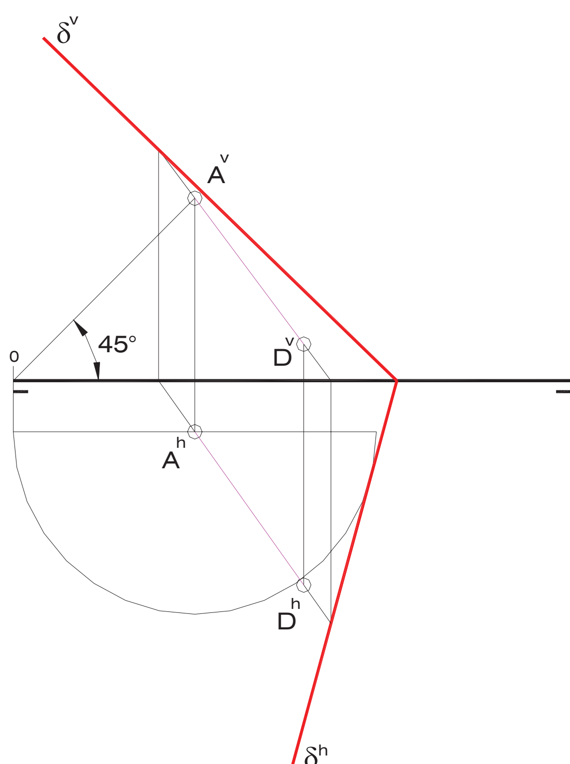


Fig. 5.26-a

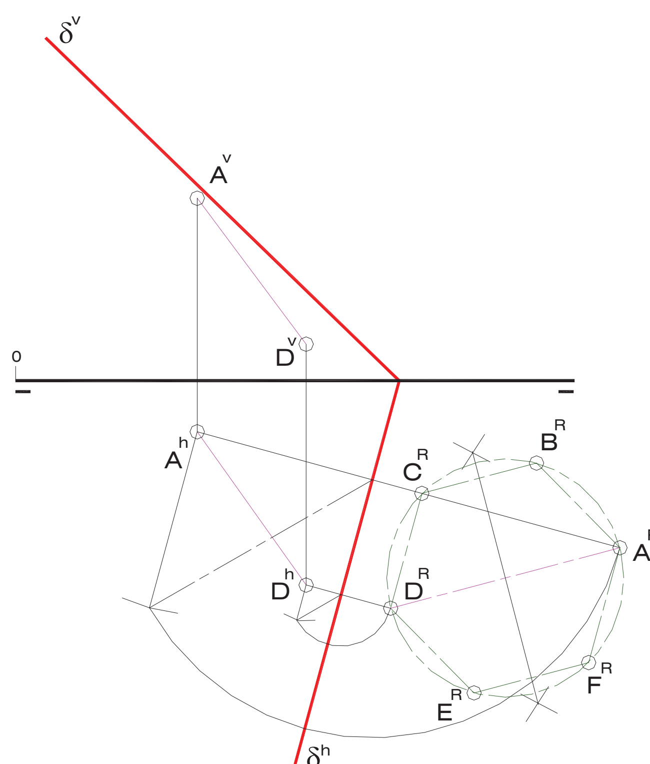


Fig. 5.26-b

Una vez hallada la doble proyección ortogonal de los vértices básicos B, C, E y F y del centro de la base (punto medio de la diagonal AD), es preciso encontrar las proyecciones del vértice principal V de la pirámide. Para ello se construye una recta "e" perpendicular al plano δ y que pase por el punto O, recta ésta que constituye el eje del sólido y sobre la cual se va a encontrar V.

Resulta evidente que la recta "e" es oblicua con respecto a ambos planos de proyección, por lo tanto, si se quiere medir sobre ella el valor de la altura de la pirámide (45mm), se debe aplicar uno de los métodos estudiados – abatimiento de segmentos de recta en el ejemplo – determinando en primer lugar el verdadero tamaño de un segmento comprendido entre O y otro punto cualquiera X de la recta "e". Luego, se consigna la longitud de 45mm sobre dicho verdadero tamaño a partir de O y se obtiene el punto V buscado (Fig. 5.26-c).

Por último, es necesario realizar el análisis de la visibilidad de las aristas del sólido; de él se desprende que las aristas BC, CE, DE, CV y DV son invisibles en proyección horizontal, ya que C y D son los vértices de menor cota; de manera análoga, dado que A y B son los

vértices de menor vuelo, las aristas que convergen en ellos son invisibles en proyección vertical, a excepción de aquellas que forman parte de la línea de contorno aparente correspondiente (Fig. 5.26-d),

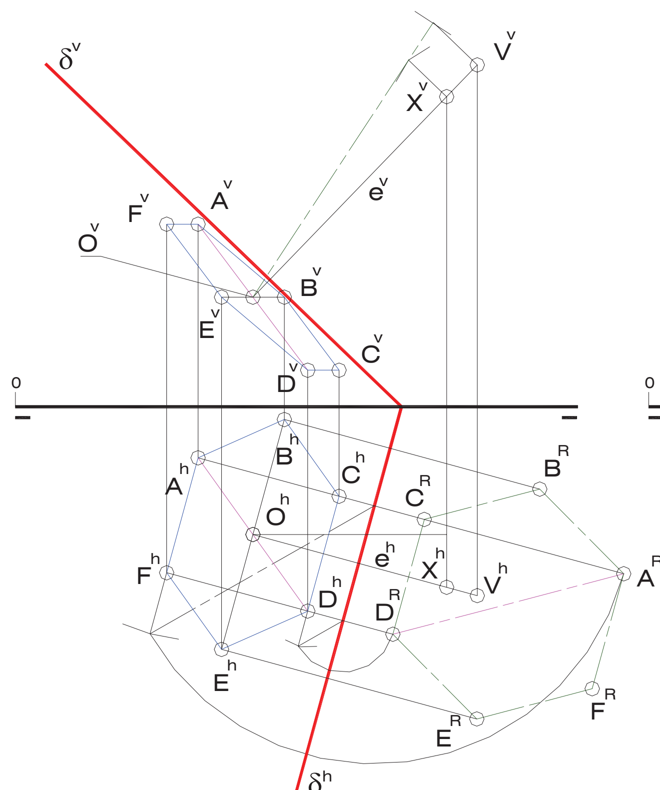


Fig. 5.26-c

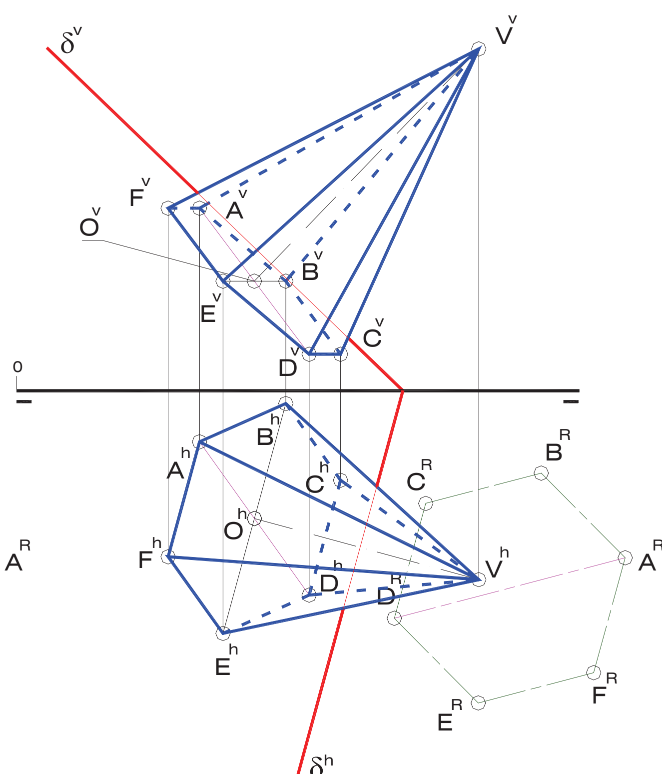


Fig. 5.26-d

5) Construya la doble proyección ortogonal de un tetraedro ABCD, sabiendo que sobre la recta "m" se encuentra la altura O_1D del poliedro, siendo O_1 el centro de la cara ABC y D más alto que éste último. La arista AB forma 45° con la traza vertical del plano que contiene a la cara ABC (B a la derecha y de mayor cota que A). La altura del sólido es de 30mm. Analice e indique la visibilidad del poliedro.

$$m[O_1(30,21,20),1(30,40,51)]$$

Solución (Fig. 5.27)

El primer paso que se ha dado en la resolución de este problema es la determinación del vértice D del tetraedro, consignando sobre la recta "m" la longitud de la altura "h" del sólido, a partir de O_1 y en sentido ascendente; esta operación se ha realizado en una proyección lateral auxiliar, dada la condición de recta de perfil que tiene la recta "m".

Resulta conveniente destacar que el paso anterior bien podría ser realizado al final del procedimiento, una vez encontrada la doble proyección ortogonal de la cara ABC, la cual se encuentra contenida en un plano γ que pasa por el punto O_1 (centro de la cara ABC) y que es perpendicular a la recta "m". Este plano es paralelo a la línea de tierra y se ha construido partiendo de su traza lateral (Fig. 5.27-a).

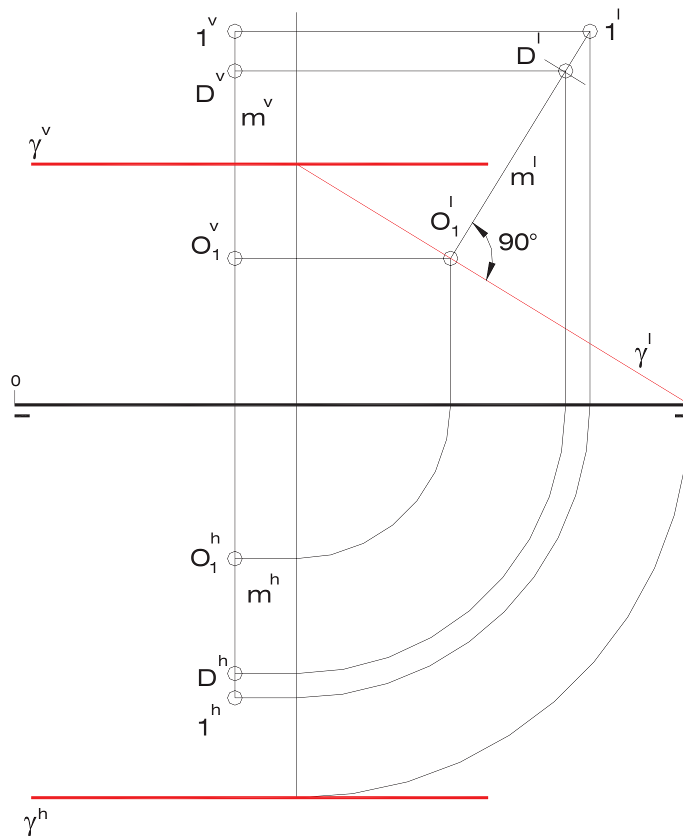


Fig. 5.27-a

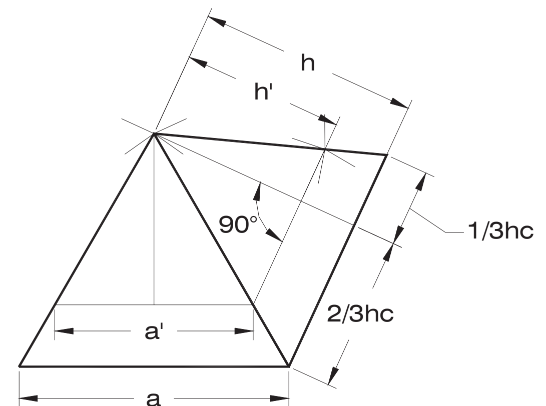


Fig. 5.27-b

En este problema, al igual que en cualquier otro problema de construcción de poliedros regulares, es preciso dibujar la sección principal del sólido con la finalidad de obtener todas las dimensiones lineales importantes. Sin embargo, la sección principal que posee las dimensiones del tetraedro cuyas dimensiones se desean hallar no puede ser trazada de manera directa, por lo que se ha dibujado una sección principal que corresponde a un tetraedro de longitud de arista arbitraria "a", consignando luego la altura "h" de 30mm y generando, mediante semejanza de figuras planas, la sección principal adecuada, tal y como se muestra en la Fig. 5.27-b.

Una vez abatido el punto O_1 se procede a dibujar el verdadero tamaño de la cara ABC, sabiendo que el radio de la circunferencia de la circunscribe es igual a dos tercios de la altura de cara del tetraedro. Es necesario recordar que el lado A^RB^R forma 45° con la traza vertical abatida, con B^R a la derecha y más cerca del eje de abatimiento (B de mayor cota que A), por lo que debe ser perpendicular al diámetro de la circunferencia que pasa por C, el cual forma 45° con γ^{vR}. Seguidamente, se procede a buscar las proyecciones diédricas de los vértices A, B y C siguiendo un procedimiento inverso al empleado para abatir a O_1 (Fig. 5.27-c).

Finalmente, debe realizarse el acostumbrado análisis de visibilidad mediante la comparación de la cota y el vuelo de los vértices del poliedro. Es fácil notar que el vértice de menor vuelo es el punto C, de manera que la proyección vertical de la arista BC debe ser dibujada con línea de trazos, pues dicha arista es invisible en esa proyección. Lo propio ocurre con la proyección horizontal de la arista AB, ya que A es el vértice de menor cota)Fig. 5.27-d).

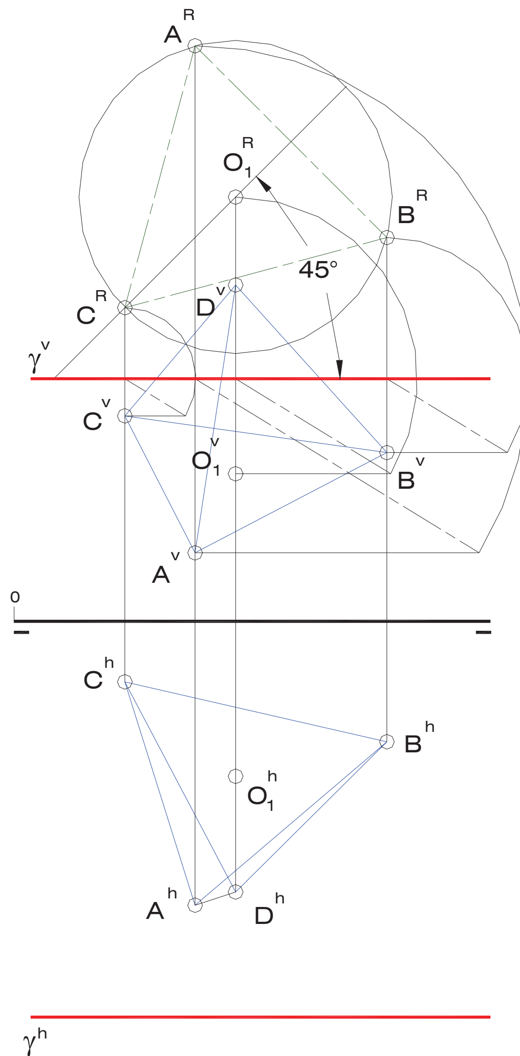


Fig. 5.27-c

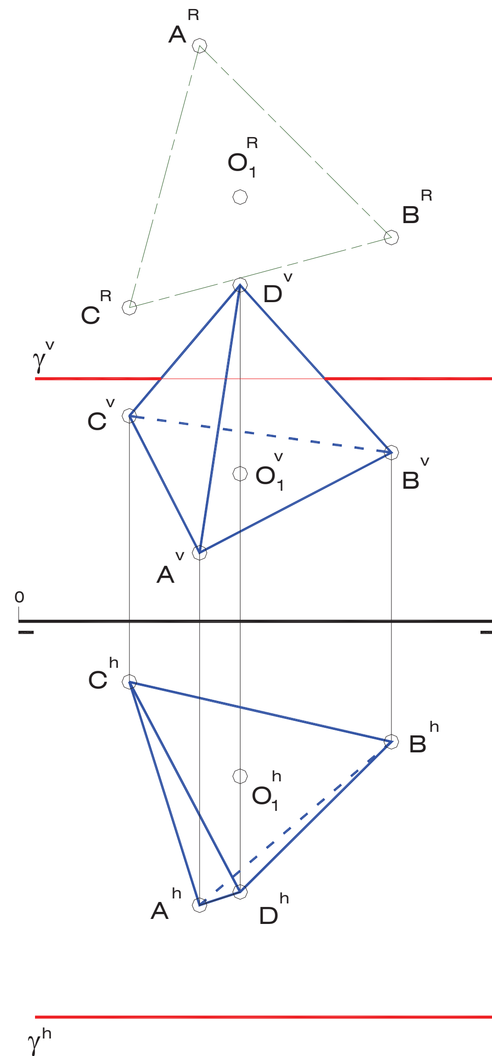


Fig. 5.27-d

6) Construya la doble proyección ortogonal de un tetraedro ABCD sabiendo que N es el punto medio de la altura O_1D del poliedro, M es el punto medio de la arista AD y que el plano que contiene a la sección principal que pasa por la arista AD es proyectante vertical. Tome la solución de mayor vuelo para el vértice D. Analice e indique la visibilidad del sólido.

$M(25,20,18) \quad N(38,20,28)$

Solución (Fig. 5.28)

Dado que los puntos M y N pertenecen a AD y a la altura del poliedro O_1D, respectivamente, el plano δ que contiene a la sección principal del sólido que pasa por la arista AD (ADX, siendo X el punto medio de la arista BC) contiene al segmento MN. De acuerdo con el enunciado del problema, este plano δ es proyectante vertical, de manera que su traza vertical se confunde con la proyección vertical de la recta definida por MN. Si se genera una nueva proyección sobre un plano paralelo a δ es posible construir el verdadero tamaño de la sección principal ADX (Fig. 5.28-a).

Para dibujar la sección principal del sólido es preciso construir en primer lugar una que corresponda a una longitud de arista arbitraria “a’” (Fig. 5.28-b). Sobre ella se identifican M’ y N’, puntos medios de la arista A’D’ y de la altura O_1’D’, respectivamente, y se consigna el verdadero tamaño del segmento MN (t) a partir de M’ y en la dirección del segmento M’N’. Luego, aplicando semejanza de figuras planas, se obtiene la sección principal correspondiente al tetraedro cuyas proyecciones se han de construir.

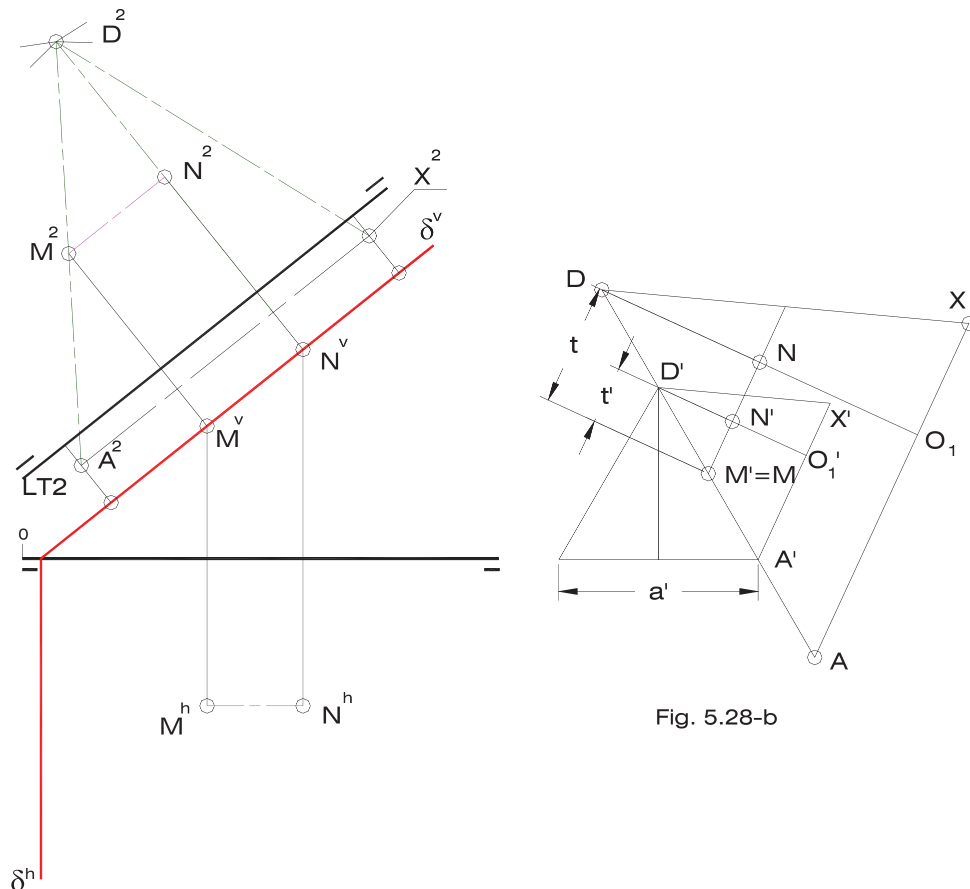


Fig. 5.28-a

Fig. 5.28-b

Una vez halladas las proyecciones diédricas de los puntos A, D y X se procede a construir una recta perpendicular al plano δ que pase por X – punto medio de la arista BC – sobre la cual se encuentran los vértices B y C del tetraedro. Dado que dicha recta es frontal, es posible copiar sobre ella la mitad de la longitud de las aristas del sólido a cada lado de X en proyección vertical, dando lugar a las proyecciones verticales de B y C; las proyecciones icnográficas de estos puntos se obtienen trazando las respectivas referencias perpendiculares a LT (Fig. 5.28-c).

Es de hacer notar que la cara ABC del sólido se encuentra en un plano frontal y que ninguna de las aristas en es invisible en la proyección vertical. Por otra parte, si bien es cierto que el vértice A es el de menor cota en el ejercicio, todas las aristas que convergen en él forman parte del contorno de la proyección, por lo tanto se dibujan con línea de construcción gruesa en la proyección horizontal. Además, en esa misma proyección la arista BD es visible, dado que B es el vértice de mayor cota del poliedro.

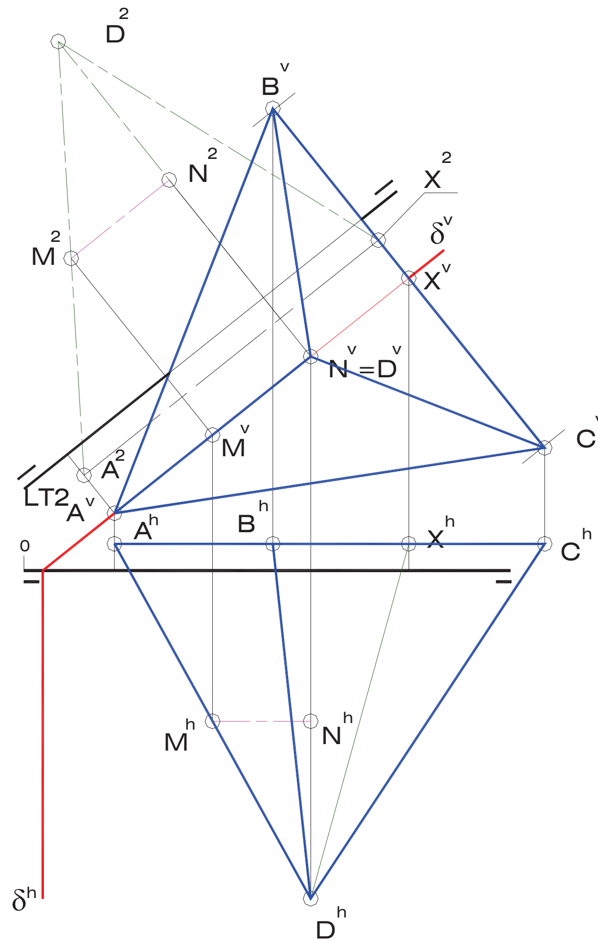


Fig. 5.28-c

7) Determine la doble proyección ortogonal de un hexaedro ABCDEFGH, sabiendo que el plano γ contiene a la cara ABCD. El vértice B del poliedro se encuentra sobre el plano horizontal de proyección y a la derecha de A

$$\gamma \begin{cases} 1(35{,}20{,}00) \\ 2(45{,}00{,}30) \\ 3(10{,}00{,}00) \end{cases} \qquad E(15{,}25{,}30)$$

Solución (Fig. 5.29)

Trazando por E una recta perpendicular al plano γ se obtiene, en la intersección con el mismo, el vértice A del sólido. Luego, el verdadero tamaño de AE corresponde a la longitud de las aristas del poliedro (Fig. 5.29-a). No es necesario en este ejercicio construir la sección principal del sólido, ya que es posible construir una de sus caras, procediendo luego como si se tratara de un prisma recto de base cuadrada en el que las aristas básicas tienen igual longitud de que las aristas laterales.

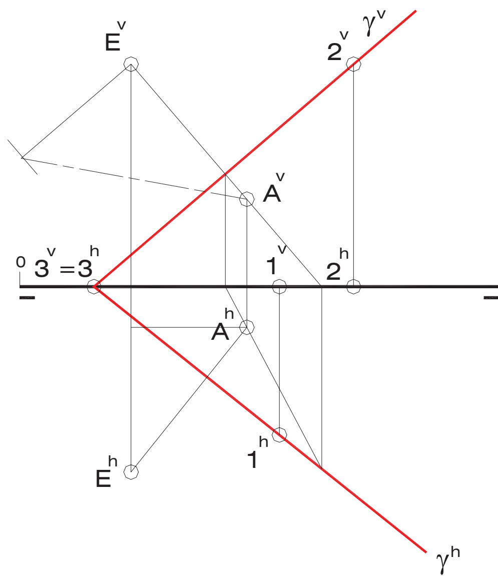


Fig. 5.29-a

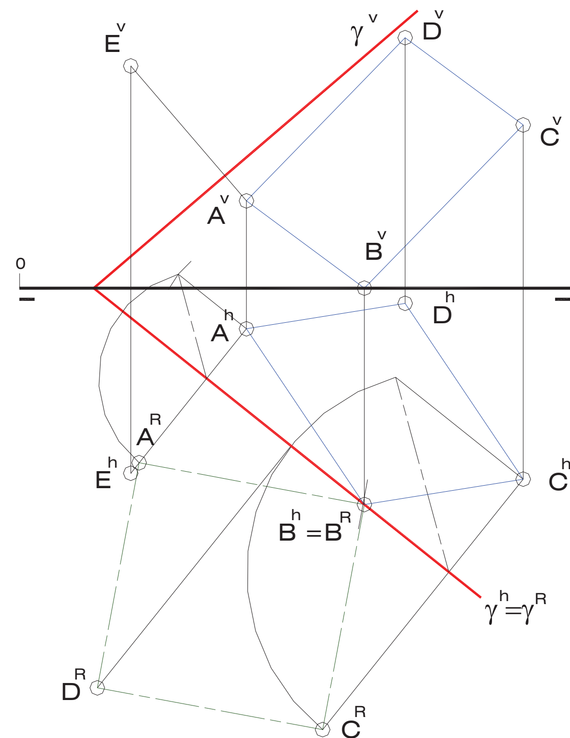


Fig. 5.29-b

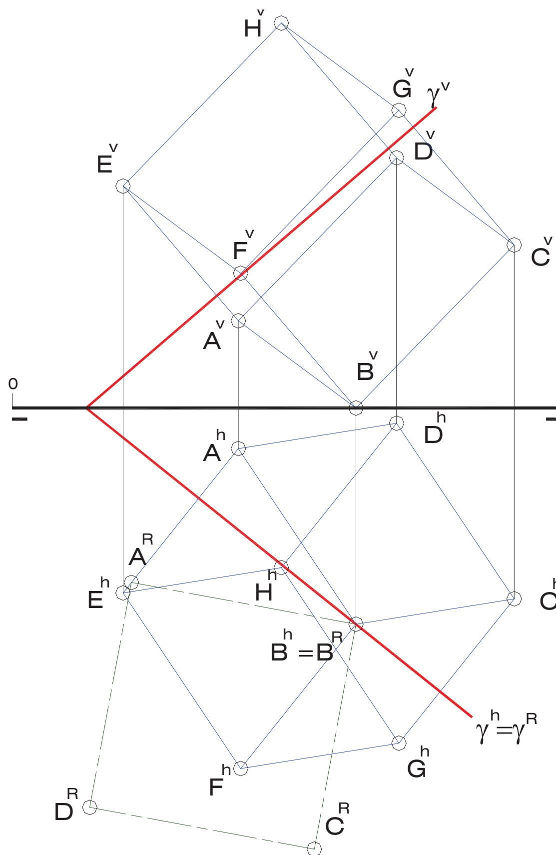


Fig. 5.29-c

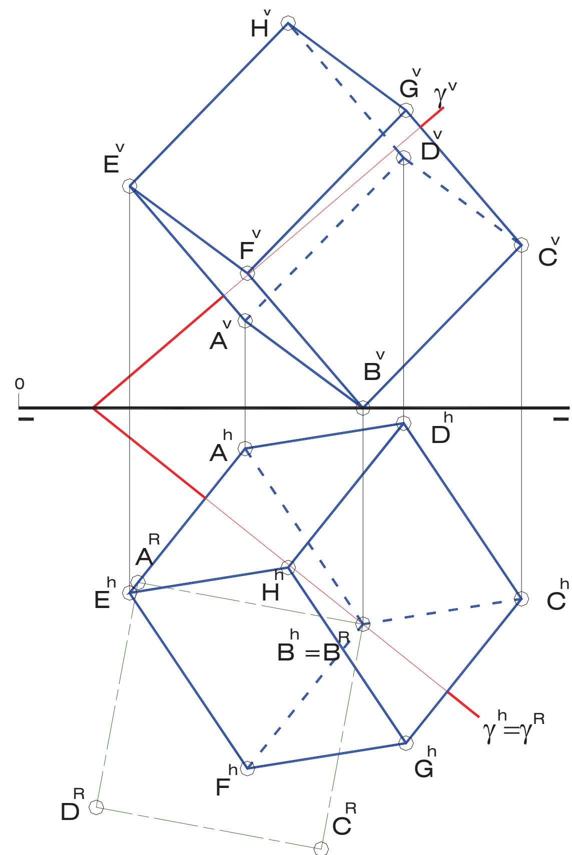


Fig. 5.29-d

Para construir el verdadero tamaño de la cara ABCD conviene abatir el plano γ sobre el plano horizontal de proyección, ya que sobre éste se encuentra el punto B. Trazando un arco de centro en A^R y de radio igual al verdadero tamaño de AE se obtiene, en el corte con la traza horizontal de γ, al punto B^R, el cual coincide con la proyección horizontal de B. Luego se dibujo el resto del cuadrado $A^RB^RC^RD^R$ y se procede a encontrar las proyecciones diédricas de B, C y D (Fig. 5.29-b). Los vértices F, G y H del hexaedro se obtienen mediante la aplicación de paralelismo entre rectas en cada una de las dos proyecciones (Fig. 5.29-c).

Por último, es preciso realizar el análisis de visibilidad correspondiente, del cual se desprende que las aristas AB, BC y BF son invisibles en proyección horizontal, puesto que convergen en B, vértice de menor cota. De manera análoga, las aristas AD, CD y DH son invisibles en proyección vertical, ya que convergen en D, vértice de menor vuelo del sólido.

8) Determine las proyecciones diédricas de un hexaedro ABCDEFGH conocidos los vértices E y C. Se sabe, además, que A se encuentra sobre PH (Solución de menor vuelo para A). Analice e indique la visibilidad del poliedro.

$$E(30,60,10) \quad C(70,25,50)$$

Solución (Fig. 5.30)

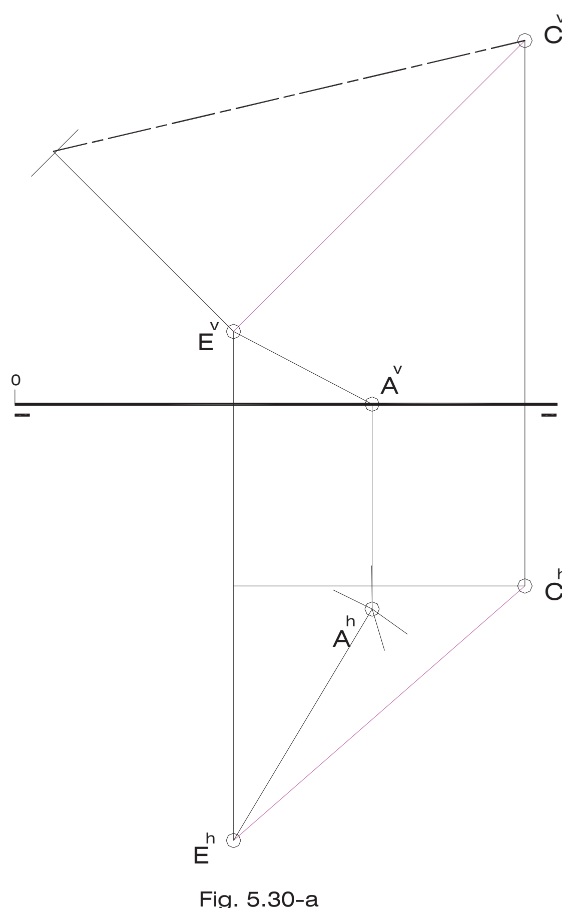


Fig. 5.30-a

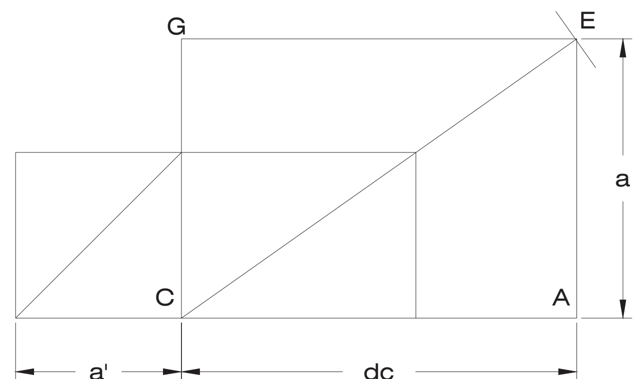


Fig. 5.30-b

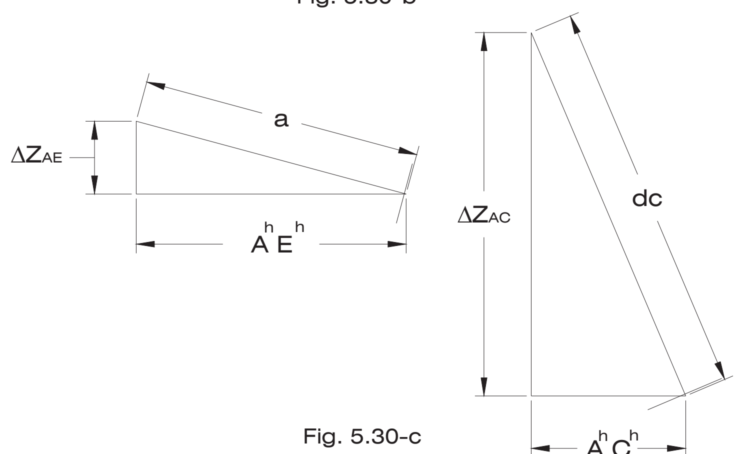


Fig. 5.30-c

Siendo CE una de las diagonales principales del cubo, su verdadero tamaño es primordial para trazar en un dibujo auxiliar (Fig. 5.30-b) la sección principal ACGE, partiendo de un cuadrado de lado arbitrario “a’”. De dicha sección principal se obtienen las longitudes AC

(diagonal de cara "dc") y AE (arista "a"), pero no pueden ser trasladadas de forma directa a alguna de las proyecciones diédricas. Sin embargo, en vista de que A tiene cota igual a cero, se conocen las diferencias de cota entre los segmentos AC y AE, lo que permite junto a los verdaderos tamaños de AC y AE – de la Fig. 5.30-b – la construcción de los triángulos de abatimiento que se muestran en la Fig. 5.30-c. De manera que, haciendo en centro en E^h y con radio A^hE^h y luego en C^h con radio A^hC^h, se trazan arcos que se cortan en la proyección horizontal del punto A (Fig. 5.30-a).

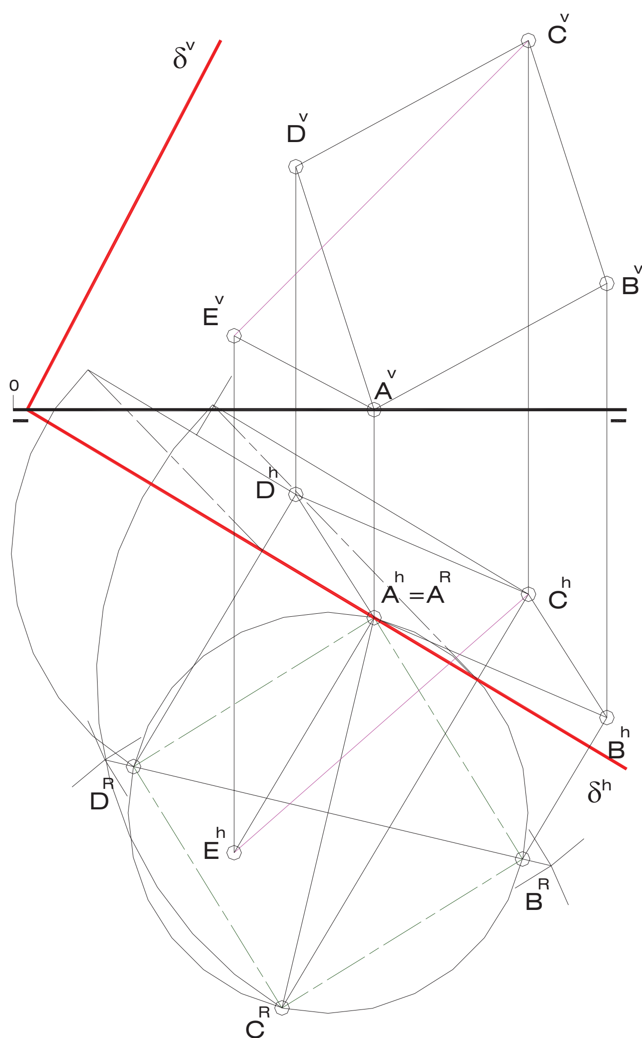


Fig. 5.30-d

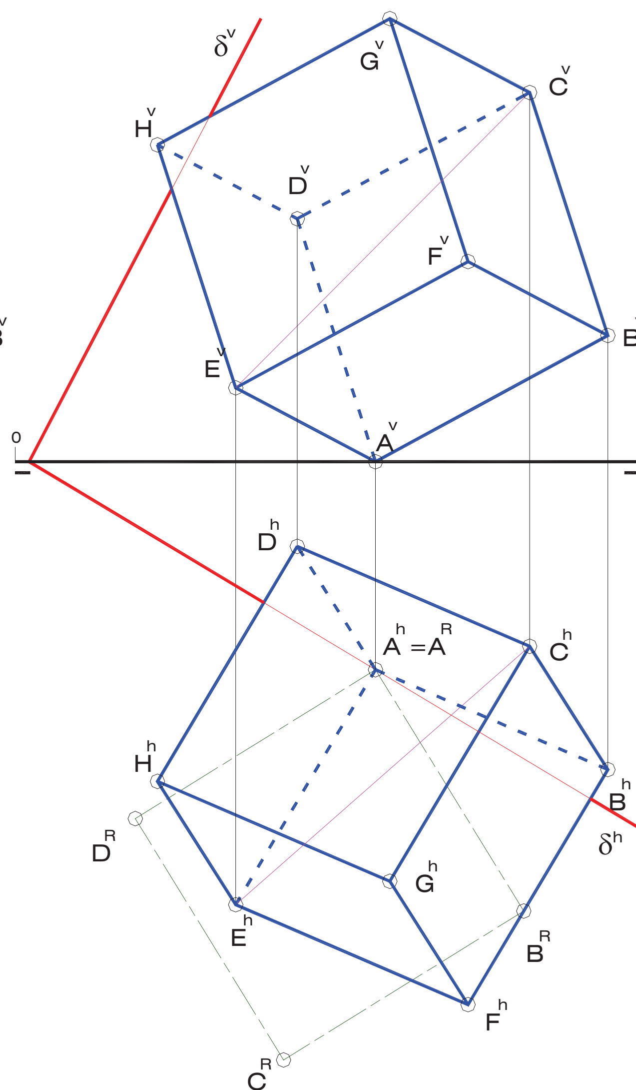


Fig. 5.30-e

Una vez conocido el punto A es posible construir el plano δ que contiene a la cara ABCD, ya que es perpendicular a la arista AE. Abatiendo este plano sobre uno de los de proyección, se procede a dibujar el verdadero tamaño de la cara ABCD, para luego hallar las proyecciones diédricas de los puntos B y C (Fig. 5.30-d). Seguidamente, se obtienen las proyecciones de los demás vértices del sólido aplicando paralelismo entre rectas.

Del acostumbrado análisis de visibilidad se desprende que las aristas convergentes en A son invisibles en la proyección horizontal o icnográfica, en tanto que las que convergen en D lo son en la proyección vertical u ortográfica, ya que A es el vértice de menor cota y D es el de menor vuelo de todo el conjunto de vértices que compone al poliedro (Fig. 5.30-e).

APÉNDICE

MANEJO DE INSTRUMENTOS Y CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS BÁSICAS

A.1 Manejo de los instrumentos de dibujo

El dibujo técnico es la disciplina que sirve de medio de expresión a la geometría descriptiva, y al diseño de proyectos en general, en todas las ramas de la ingeniería. Por este motivo, resulta de una importancia capital el correcto manejo del instrumental y de los procedimientos básicos del trazado para lograr resultados de calidad aceptable, ya que si el ejecutante no se esmera en adquirir la técnica correspondiente, siempre obtendrá resultados mediocres, aún cuando posea un amplio dominio en la parte teórica.

Las herramientas mínimas necesarias para la ejecución de los trabajos propios de esta rama del conocimiento son los siguientes: lápices, goma de borrar, regla graduada en milímetros, escuadra, cartabón, compás de precisión, plantilla para borrar, sacapuntas o afila minas y papel blanco base 20.

A.1.1 El lápiz

Para el dibujo técnico se prefiere el uso de lápices de madera con núcleo de grafito, si bien es cierto que existen los lapiceros semiautomáticos o portaminas, los cuales presentan la ventaja de prescindir del uso de sacapuntas. Según el grado de dureza los lápices especiales para el dibujo se clasifican por letras y números. La serie H (del inglés *hard*) va del H hasta el 8H y corresponde a lápices duros y por lo tanto de un trazo más fino; el número que acompaña a la letra indica el grado de dureza: a mayor el número, mayor la dureza. La serie B (del inglés *black*) está compuesta por lápices de mina blanda, siendo el 7B el más blando y por lo tanto genera un trazo muy grueso inapropiado para el dibujo técnico. El lápiz F (del inglés *firm*) es único y posee una dureza intermedia entre las dos series anteriores. Lo mismo se aplica al lápiz HB.

En la realización de dibujos de índole técnica se aconseja el uso de los lápices F o HB, H, 4H y 2H, debido al espesor de las líneas utilizadas, el cual está regulado por la normativa internacional (ISO).

Resulta conveniente mantener muy bien afilada la punta del lápiz con la finalidad de obtener un trazado nítido, uniforme y preciso para todos los tipos de líneas. La técnica más recomendada implica sostener el lápiz de manera firme, manteniendo una presión constante sobre el instrumento (regla, escuadra o plantilla) y haciendo rotar la punta a medida que se traza la línea. Debe procurarse mantener un ángulo de unos 60º entre el lápiz y el papel en la dirección del trazado.

A.1.2 El compás

Es un instrumento de precisión con el cual se pueden trazar arcos de circunferencia y tomar y copiar distancias. De los distintos tipos de compás existentes, se prefiere el uso del *de bigotera* (Fig. A.1) debido a su reducido tamaño y bajo costo. Los brazos de este tipo de compás se acercan y se separan por la acción de un tornillo regulador, lo que se traduce en trabajos de buen nivel de precisión.

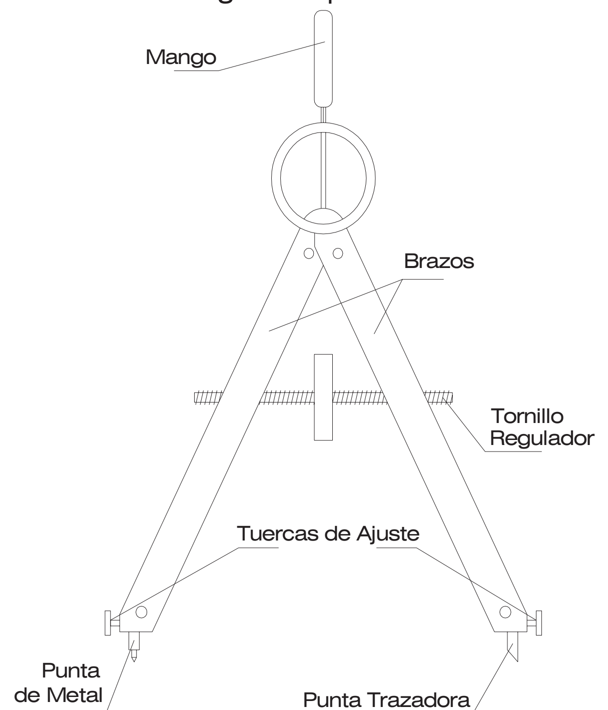


Fig. A.1: Compás de bigotera.

Las agujas del compás presentan dos puntas, de las cuales una es fina y con un ensanchamiento que evita su penetración a mayor profundidad, previniendo así que el orificio hecho en el papel sea de grandes dimensiones. Algunos modelos poseen un soporte en el que se pueden fijar lápices, siendo éste el más recomendado por su versatilidad.

Para obtener un buen resultado se recomienda seguir el siguiente procedimiento a la hora de trazar arcos de circunferencia: En primer lugar se debe marcar el centro mediante dos trazos, uno vertical y uno horizontal, a manera de cruz. Luego se mide el radio a partir de esa marca empleando una regla graduada, señalándolo con una marca muy suave. Seguidamente se coloca la punta en el centro del arco y se abre hasta lograr alcanzar la marca del radio, realizando luego el giro sujetando el compás por el mango con los dedos índice y pulgar. Este movimiento debe ser, preferiblemente, en sentido horario e inclinando ligeramente el instrumento.

A.1.3 La escuadra y el cartabón

Estos instrumentos se utilizan en el trazado de líneas rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas a 30º, 60º 15º y 75º (Fig. A.2) y tienen forma de triángulo rectángulo. Los catetos de la escuadra tienen igual longitud debido a que forman 45ª con la hipotenusa; en el cartabón, los catetos forman con la hipotenusa ángulos de 30º y 60º, por lo que tienen diferente longitud. Estos instrumentos se utilizan apoyándolos uno sobre el otro, empleando uno de ellos como elemento móvil. El uso de la regla T se omite en este trabajo, debido a que los dibujos ejecutados en geometría descriptiva presentan pequeñas dimensiones.

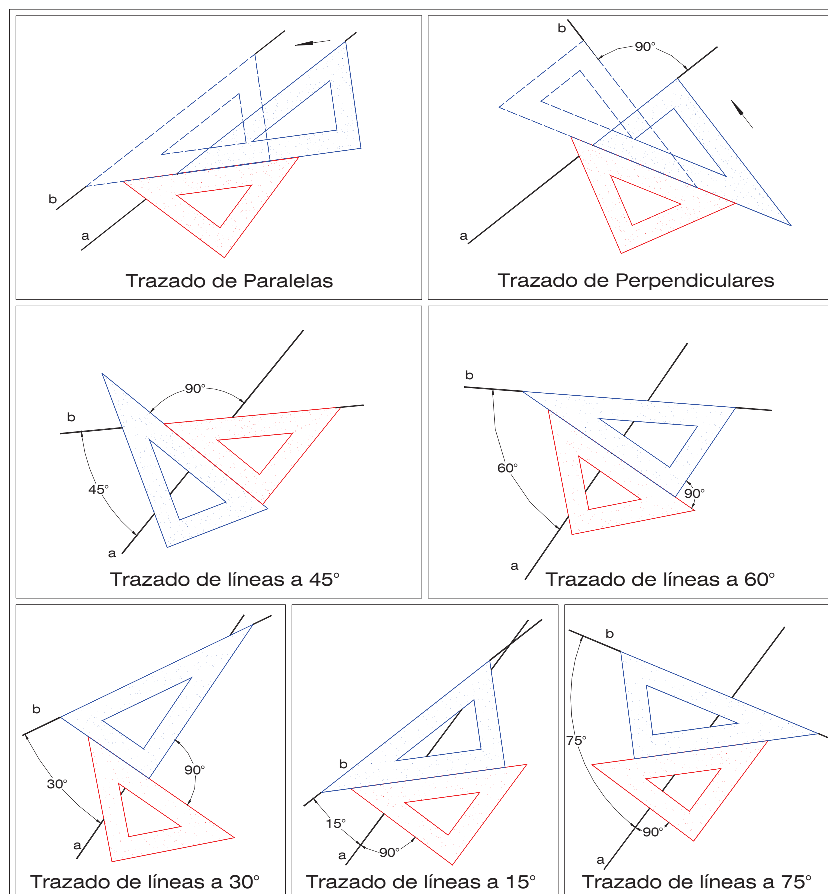


Fig. A.2: Uso de la escuadra y el cartabón.

A.2 Tipos de líneas

Con la finalidad de realizar dibujos que ofrezcan una fácil interpretación es preciso establecer las características y usos que tienen los diferentes tipos de líneas utilizados en el dibujo de problemas geométricos. Por otra parte, en vista de que el dibujo técnico está al servicio de la industria, sus procedimientos y formatos están sujetos a normalización.

En la ejecución de la solución de problemas geométricos en geometría descriptiva se emplean los siguientes tipos de líneas (Fig. A.3):

1. Líneas auxiliares y de construcción: Son empleadas como guías y en los pasos necesarios para realizar determinadas construcciones geométricas, por lo tanto, no forman parte del resultado final. Su trazo debe ser fino, ya que debido a su abundancia podrían generar confusión en la lectura del dibujo. Sin embargo, deben ser perceptibles con el fin de hacer posible la comprensión del procedimiento seguido en la resolución del problema, por esta misma razón es importante que una vez concluido el trabajo no se borren. Se recomienda el uso del lápiz 4H para su construcción.
2. Líneas visibles definitivas: corresponden a las líneas visibles de la solución definitiva a un determinado problema geométrico, por lo que deben resaltar entre todas las demás líneas. Su trazo debe ser grueso pero no demasiado para evitar suciedad en la superficie de trabajo. Se recomienda el uso del lápiz F o HB.
3. Líneas invisibles definitivas: son líneas de trazos cortos empleadas en el dibujo de segmentos y aristas invisibles de la solución a un determinado problema geométrico. Para su construcción se recomienda el uso del lápiz H.
4. Líneas de eje: se aplican en el trazado de ejes de sólidos radiales, como prismas, pirámides, conos y cilindros. Tienen el mismo espesor de las líneas invisibles por lo que para su trazado se emplea el lápiz H.
5. Líneas de verdadero tamaño: corresponden a segmentos de recta y figuras planas en proyecciones auxiliares cuyas dimensiones son iguales a las del elemento original. Deben ser trazadas empleando un lápiz 2H.

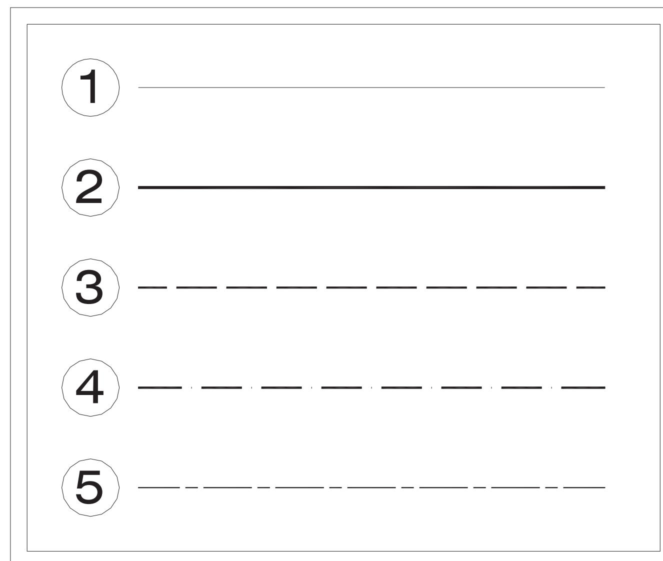


Fig. A.3: Tipos de líneas

A.3 Construcciones geométricas básicas

A.3.1 Ejercicios de Trazado Básico

A continuación se presentan algunos de los problemas de trazado elemental más comunes en el dibujo técnico, acompañados de la solución correspondiente.

1. **Trazar una perpendicular a un segmento AB por su extremo A** (Fig. A.4).

Se traza una circunferencia con centro en A y radio cualquiera; esta circunferencia corta al segmento AB en el punto 1 y a su prolongación en el punto 2. Luego, haciendo centro en 1 y luego en 2, se trazan arcos de radio igual a una distancia mayor que el segmento A1. El corte de tales arcos es el punto 3. Finalmente, la recta definida por los puntos A y 3 es la perpendicular buscada.

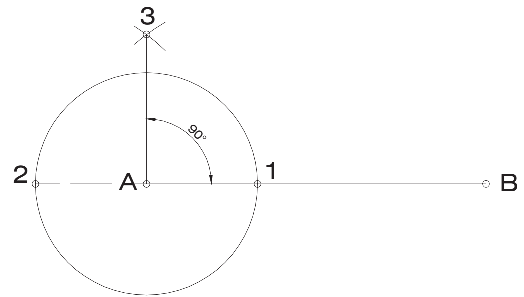


Fig. A.4

2. **Trazar una perpendicular a un segmento AB por un punto cualquiera P** (Fig. A.5).

Se traza un arco de centro en P y radio cualquiera, tal que dicho arco corte a la recta definida por AB en los puntos 1 y 2. Luego, con centro en 1 y en 2 y radio P1 se trazan dos arcos que se cortan en el punto 3; la línea recta que pasa por los puntos P y 3 es la perpendicular buscada.

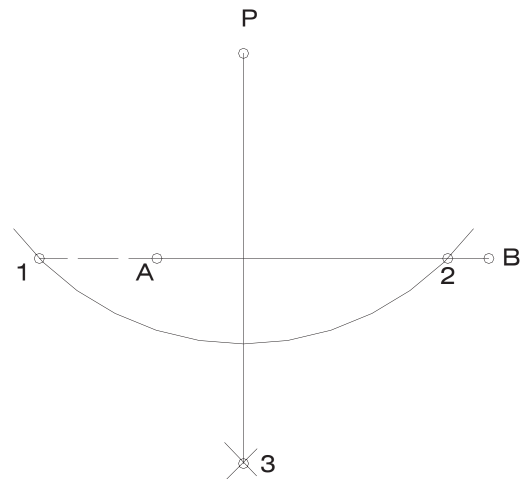


Fig. A.5

3. **Trazar la mediatriz de un segmento AB y determinar su punto medio M** (Fig. A.6).

La mediatriz de un segmento es una recta perpendicular a aquél que lo divide en dos partes iguales.

Se comienza trazando arcos con centro en A y B de radio igual a cualquier distancia mayor que la mitad de AB. Los cortes de tales arcos son los puntos 1 y 2. La línea recta que pasa por los puntos 1 y 2 es la mediatriz del segmento AB; el corte entre la mediatriz de AB y el propio segmento AB es su punto medio M.

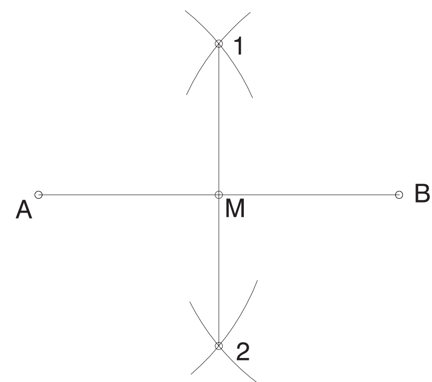


Fig. A.6

4. **Determinar la bisectriz del ángulo formado por las rectas “a” y “b”** (Fig. A.7).

Haciendo centro en el vértice O del ángulo, se traza un arco de radio cualquiera que corta a las rectas “a” y “b” en los puntos 1 y 2, respectivamente. Luego, con el mismo radio, se trazan otros dos arcos cuyos centros son 1 y 2; el corte entre tales arcos define al punto 3. La línea recta que pasa por el vértice del ángulo y por el punto 3 es la bisectriz pedida.

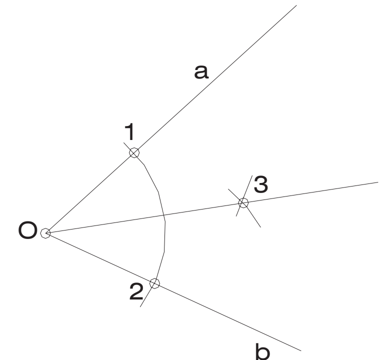


Fig. A.7

5. **Dividir el ángulo recto en tres partes iguales** (Fig. A.8).

Haciendo centro en el vértice O del ángulo, se traza un arco de radio cualquiera que corta a los lados del ángulo recto en los puntos 1 y 2. Manteniendo la misma abertura del compás, se hace centro en forma sucesiva en los puntos 1 y 2 y se trazan arcos que cortan al arco 12 en los puntos 3 y 4. Luego las líneas rectas O3 y O4 dividen al ángulo recto en tres partes iguales.

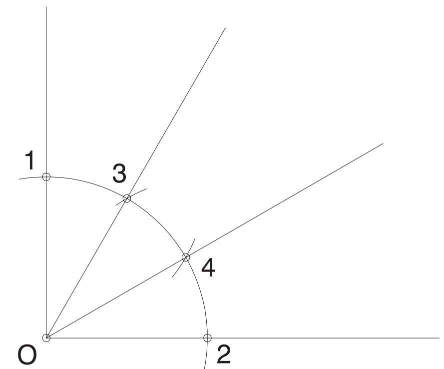


Fig. A.8

6. **Dividir un segmento de recta AB en *n* partes iguales** (Fig. A.9).

Sea un segmento de recta AB, el cual se quiere dividir en ocho (8) partes iguales. En general, el segmento AB tiene una longitud tal que al ser dividida por *n* da como resultado un número no entero (muchas veces irracional) por lo que es aconsejable realizar la división aplicando la aritmética.

El procedimiento gráfico consiste en trazar por uno de los extremos de AB (A en la figura) una línea recta de cualquier longitud divisible por *n* (ocho en el ejemplo). Luego de dividir esta línea en *n* partes iguales, se traza otra línea recta que pase por el otro extremo del segmento AB (B en la figura) y por la última marca hecha en la línea cualquiera. Seguidamente se trazan paralelas a la línea así definida por las demás marcas (numeradas en la figura) obteniéndose en el segmento AB una serie de puntos que corresponden a su división.

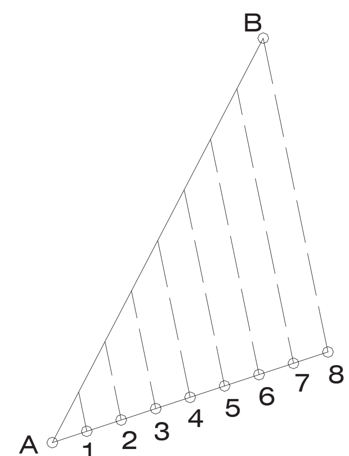


Fig. A.9

A.3.2 Construcción de Polígonos Regulares

1. **Construir un triángulo equilátero conocidos su centro O y uno de sus vértices A** (Fig. A.10).

Con centro en O y radio OA se traza una circunferencia. Luego, se busca el punto K, corte entre la prolongación de OA y la circunferencia trazada. Con centro en K y radio KO se dibuja un arco, que, al cortar a la circunferencia, define los vértices B y C del triángulo pedido.

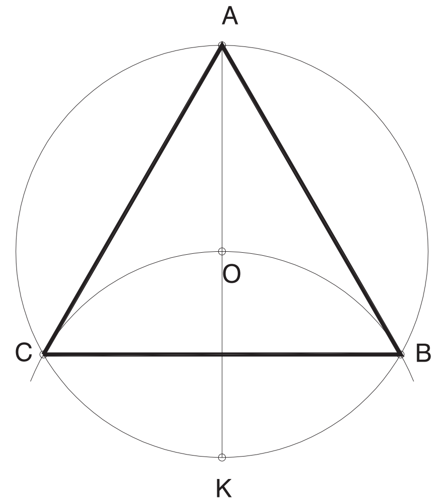


Fig. A.10

2. **Construir un triángulo equilátero conocido uno de sus lados AB** (Fig. A.11).

Con centro en A y radio AB se traza un arco. Luego, con centro en B e igual radio se dibuja un segundo arco. Los puntos de corte entre los arcos señalados definen las dos posibles soluciones para el vértice C del triángulo buscado.

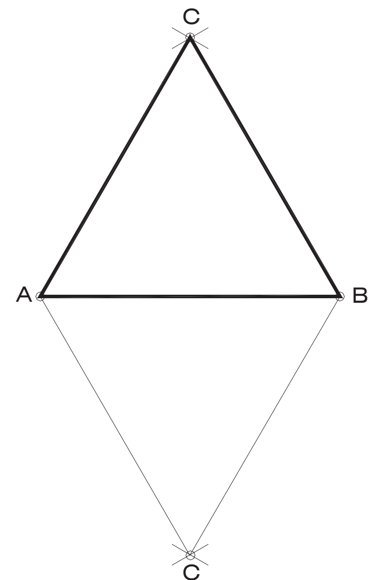


Fig. A.11

3. **Construir un triángulo equilátero conocida su altura AM** (Fig. A.12).

Se comienza dividiendo el segmento AM en tres partes iguales. El punto del segmento ubicado a una tercera parte de la longitud de la altura desde M es el centro O del polígono. Con centro en O y radio OA se traza una circunferencia. Luego, se traza una perpendicular a AM por el punto M. Finalmente, los puntos de corte entre dicha perpendicular y la circunferencia son los vértices B y C del triángulo.

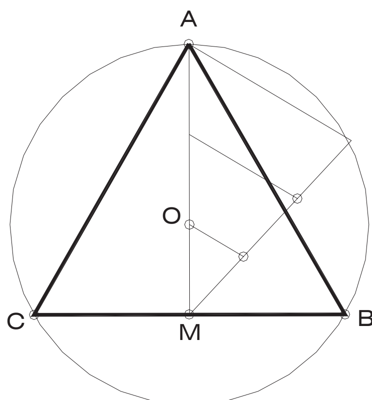


Fig. A.12

4. **Construir un triángulo equilátero conocidos el punto medio M del lado AB y el punto medio N del lado BC.** (Fig. A.13).

Con radio MN y haciendo centro sucesivamente en M y en N, se trazan dos arcos que, al cortarse entre sí, definen las dos posibles soluciones para el vértice B. Luego, se prolongan los segmentos BM y BN copiando la distancia BM (o BN). De esta manera se obtienen los vértices A y C del polígono.

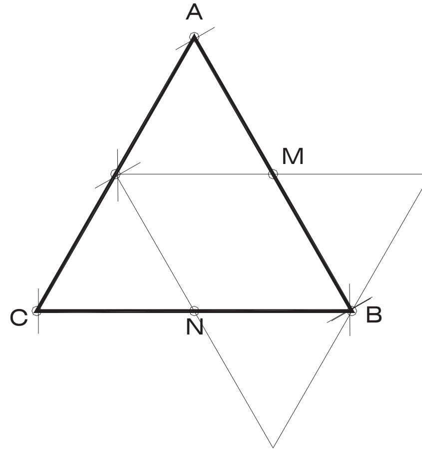


Fig. A.13

5. **Construir un cuadrado conocidos el centro O y uno de sus vértices** A (Fig. A.14).

En primer lugar se dibuja una circunferencia de centro en O y de radio OA. Luego, se prolonga el segmento OA hasta cortar a la circunferencia, lo cual da como resultado el vértice C. Finalmente, se dibuja por O una perpendicular a OA que corta a la circunferencia en los vértices B y D del polígono.

6. **Construir un cuadrado conocido uno de sus lados AB** (Fig. A.15).

Haciendo centro en A (o en B) se traza un arco de radio AB. Por B se levanta una perpendicular a AB que corta al arco trazado en el vértice D. Luego, con idéntico radio (AB) se hace centro sucesivamente en B y D y se trazan arcos que se cortan en el punto C.

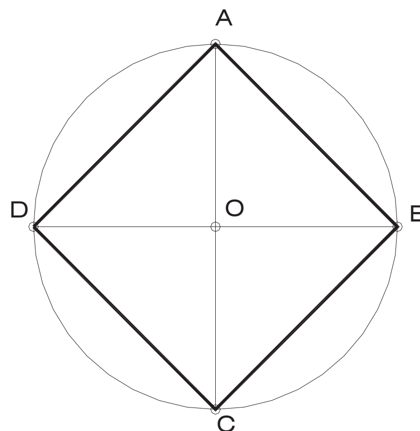


Fig. A.14

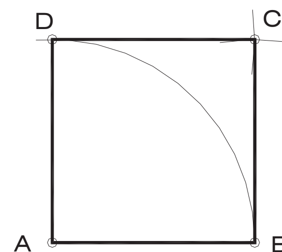


Fig. A.15

7. **Construir un cuadrado conocida una de sus diagonales AC.** (Fig. A.16).

Se determina en primer lugar la mediatriz de AC. El corte de dicha mediatriz con el segmento AC es el centro del cuadrado O. Haciendo luego centro en O y con radio OA u OC, se traza una circunferencia que corta a la mediatriz de AC en los puntos B y D, vértices del polígono.

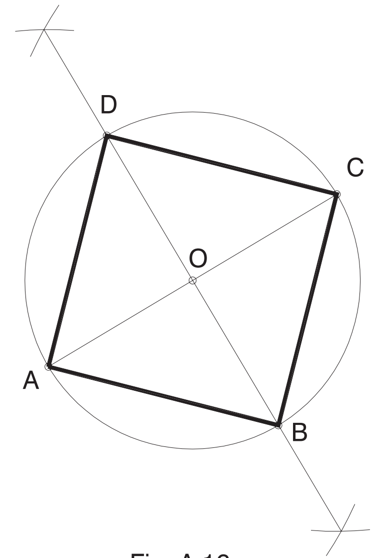


Fig. A.16

8. **Construir un cuadrado conocidos M, punto medio del lado AB, y N, punto medio del lado BC** (Fig. A.17).

En primer lugar, se determina la mediatriz y el punto medio K del segmento MN. Luego, con centro en K y radio KM o KN, se traza una circunferencia que, al cortar la mediatriz de MN, define las dos posibles soluciones para el punto B. Luego, se prolongan los segmentos BM y BN copiando la distancia BM (o BN). De esta manera se obtienen los vértices A y C del polígono. Por último, se dibujan dos arcos de radio AB y centros en A y C, respectivamente; el corte de tales arcos resulta en el vértice D del cuadrado.

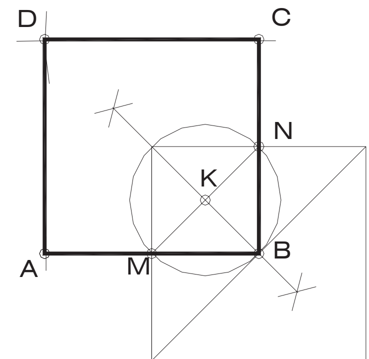


Fig. A.17

9. **Construir un pentágono regular conocido el centro O y el vértice A** (Fig. A.18).

Se comienza dibujando una circunferencia de centro en O y radio OA. Luego, se traza el diámetro perpendicular a OA y se dibuja un arco con radio OA y centro en cualquiera de los extremos del mencionado diámetro. La unión de los cortes entre el arco y la circunferencia define al punto M. Seguidamente, haciendo centro en M y con radio MA se dibuja un arco que corta al diámetro en el punto K; la distancia AK corresponde al tamaño de los lados del pentágono.

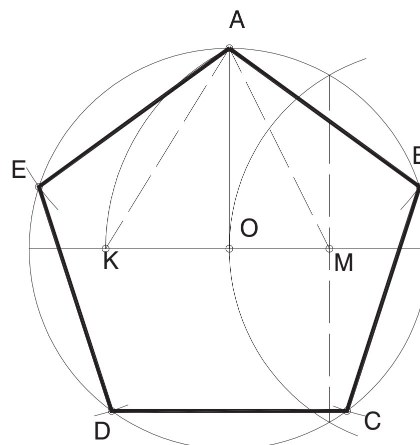


Fig. A.18

10. **Construir un pentágono regular conocido el lado AB** (Fig. A.19).

Se comienza trazando por B una perpendicular a AB y dibujando un arco de centro en B y radio BA, el cual corta a la perpendicular en el punto 1. Luego, con centro en M, punto medio de AB, y radio M1 se dibuja un arco que corta a la prolongación de AB en el punto 2. En seguida se dibuja un arco de centro en A y radio A2; el corte entre este arco y el primero que se realizó define al vértice C del pentágono. A continuación se levanta por M una perpendicular a AB y se dibuja un arco con centro en C y radio AB; el corte entre estos elementos define a D.

Finalmente, manteniendo una abertura de compás igual a AB, se trazan arcos haciendo centro en D y A sucesivamente; el corte entre ellos resulta ser el vértice E.

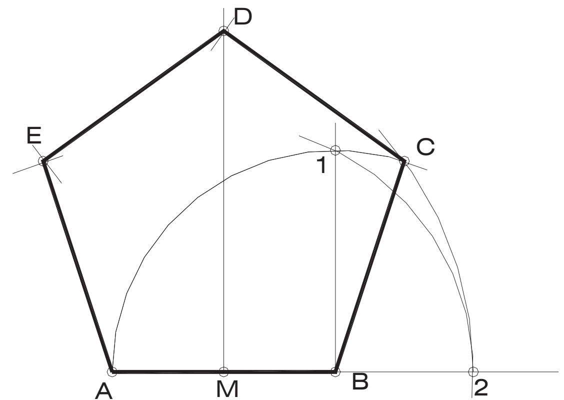


Fig. A.19

11. **Construir un pentágono regular conocidos los vértices A y C** (Fig. A.20).

En primer lugar se levanta por A una perpendicular al segmento AC y se traza un arco con centro en A y radio AC, el cual corta a la perpendicular en el punto 1. Seguidamente se determina el punto medio M del segmento A1 y se construye una circunferencia con centro en M y radio M1; el corte entre esta circunferencia y la línea recta definida por M y C resulta en el punto 2.

La distancia C2 es igual al tamaño de los lados del pentágono, por lo tanto, el corte entre dos arcos de radio C2 y con centros en A y C define al vértice B. Por último, se procede como en el ejemplo anterior.

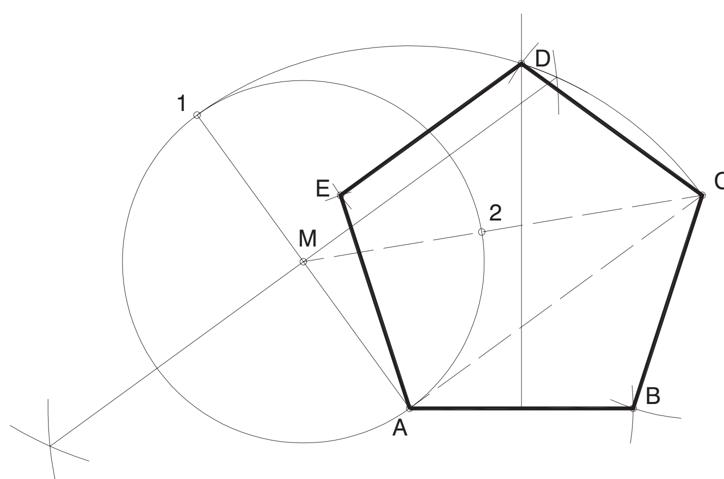


Fig. A.20

12. **Construir un pentágono regular conocido su centro y una recta "m" sobre la cual se encuentra el lado AB** (Fig. A.21).

Se traza una perpendicular a la recta "m" por el punto O que corta la corta en R (punto medio de AB). Luego, se construye una circunferencia con centro en O y radio OR (inscrita en el pentágono); el corte entre la prolongación de OR y la circunferencia es el punto D'. A continuación se construye el pentágono A'B'C'D'E' con centro en O y vértice en D'. Luego, se trazan las líneas definidas por OA' y OB'; el corte entre éstas y la recta "m" son los vértices A y B del pentágono buscado. Por último se procede como en los ejemplos 9 y 10 o aplicando semejanza de figuras planas, pues el pentágono ABCDE es semejante al pentágono 'B'C'D'E' y tienen igual centro.

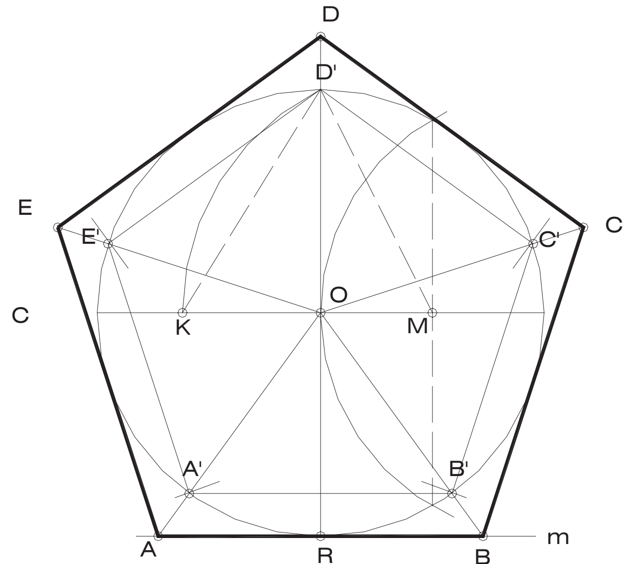


Fig. A.21

13. **Construir un hexágono regular conocidos el centro O y uno de sus vértices A** (Fig. A.22).

Primero se traza una circunferencia con centro en O y radio OA; el radio de esta circunferencia es igual ala longitud de los lados del hexágono. Luego, con el mismo radio OA y centro en A se dibujan arcos que cortan a la circunferencia en B y F. Seguidamente, con centro en B y F se trazan otros arcos – con radio OA – que generan los vértices C y E. Finalmente, si se prolonga el radio OA, se obtiene sobre la circunferencia el vértice D.

14. **Construir un hexágono regular conocido uno de sus lados AB** (Fig. A.23).

Se comienza dibujando arcos con centro en A y B de radio AB; el punto de corte entre ellos es el centro del hexágono O. Luego se procede como en el ejemplo anterior.

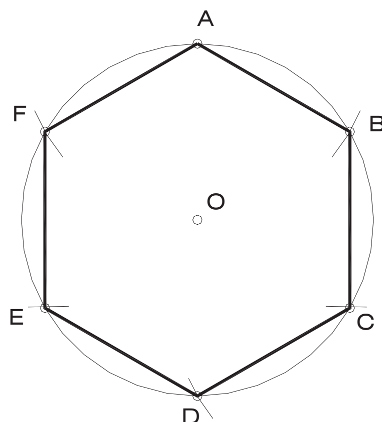


Fig. A.22

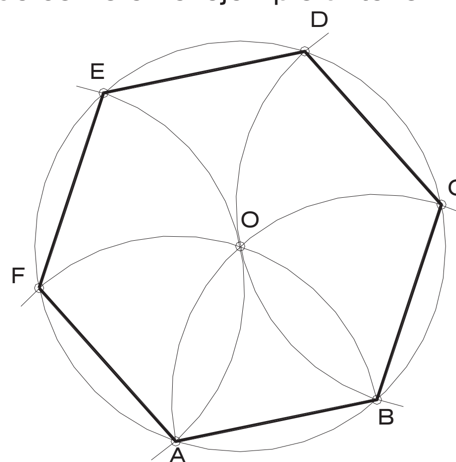


Fig. A.23

15. **Construir un hexágono regular conocidos M, punto medio de AB y N, punto medio del lado CD** (Fig. 24).

En primer lugar, se construye un par de arcos de radio MN haciendo centro en los puntos M y N de manera sucesiva; los puntos comunes a ambos arcos son las dos posibles soluciones para el punto P, punto medio del lado EF (en la figura se ha dibujado la solución de la izquierda). Luego, hallando mediatrices, se determina el centro O del triángulo equilátero MNP, el cual es también centro del hexágono, y se traza la circunferencia circunscrita al triángulo MNP que es también la circunferencia inscrita en el hexágono. Seguidamente, se construyen por cada uno de los vértices del triángulo MNP líneas paralelas al correspondiente lado opuesto; sobre tales líneas se sitúan tres de los lados del hexágono buscado. Los puntos de corte (Q, R y S) entre las mediatrices de los lados del triángulo MNP y la circunferencia inscrita en el hexágono representan los puntos medios de los lados BC, DE y FA, de manera que por cada uno de ellos se trazan perpendiculares a la mediatriz que lo ha generado, dando lugar a las rectas sobre las que se hallan los lados BC, DE y FA. Finalmente, los cortes entre rectas adyacentes resultan en los vértices del hexágono pedido.

16. **Construir un hexágono regular conocido el centro y una recta "m" que contiene al lado AB** (Fig. A.25)

Se comienza trazando líneas que pasen por O y formen 60º con la recta "m"; los puntos de corte entre dichas líneas y la propia recta "m" son los vértices A y B del polígono. Luego se procede como en el ejemplo Nº 13.

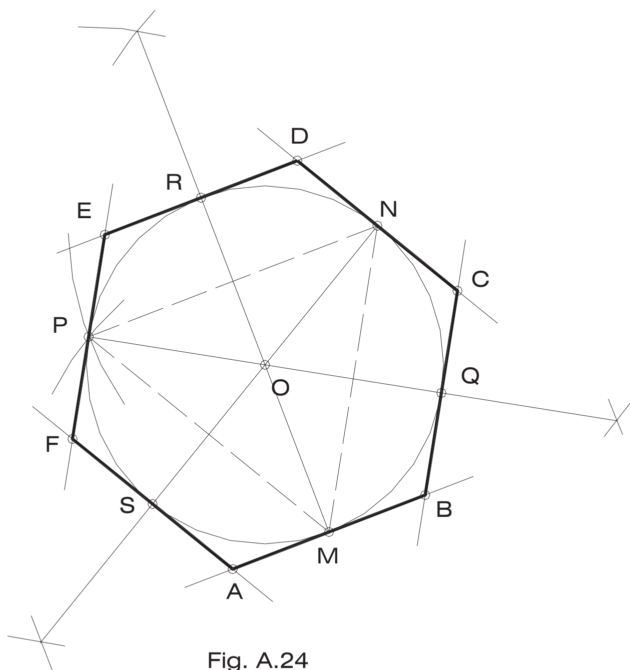


Fig. A.24

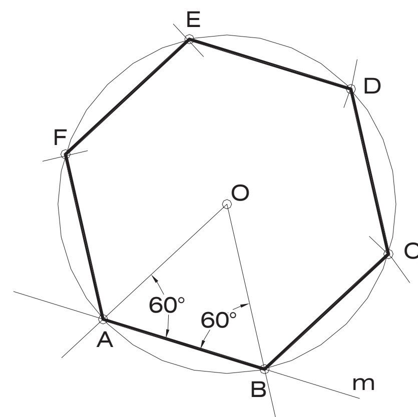


Fig. A.25

A.3.3 Circunferencia

1. **Trazar la tangente a una circunferencia por un punto A sobre ella** (Fig. A.26).

En primer lugar se hace centro en A y se traza un arco de radio OA que corta a la circunferencia en el punto 1. Luego, con centro en 1 y radio O1, se construye un arco que corta a la prolongación del segmento O1 en el punto 2. La tangente "t" queda determinada por los puntos A y 2.

2. **Trazar las tangentes a una circunferencia por un punto A exterior a ella** (Fig. A.27).

Se determina el punto medio M del segmento OA y se trazan arcos de centro en M y radio MO. Los puntos de corte entre estos arcos y la circunferencia definen los puntos de tangencia T y T'. Las rectas determinadas por AT y AT' son las tangentes "t" y "t'".

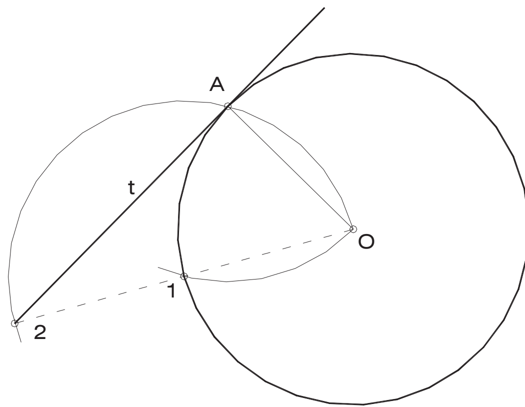


Fig. A.26

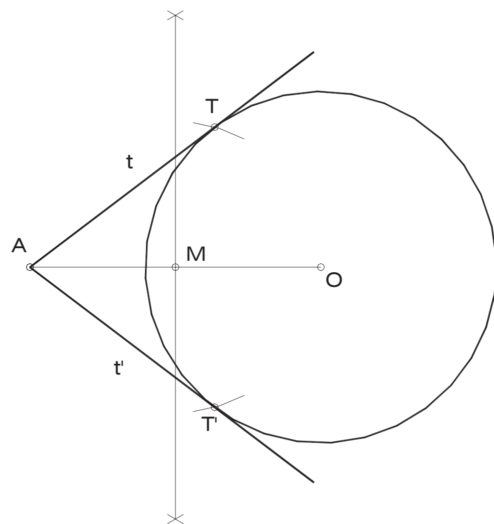


Fig. A.27

3. **Construir una circunferencia que pasa por tres puntos A, B y C (no colineales)** (Fig. A.28).

El centro de la circunferencia se encuentra en el punto de corte de las mediatrices de los segmentos AB, BC y AC. El radio es la distancia entre O y cualquiera de los tres puntos dados.

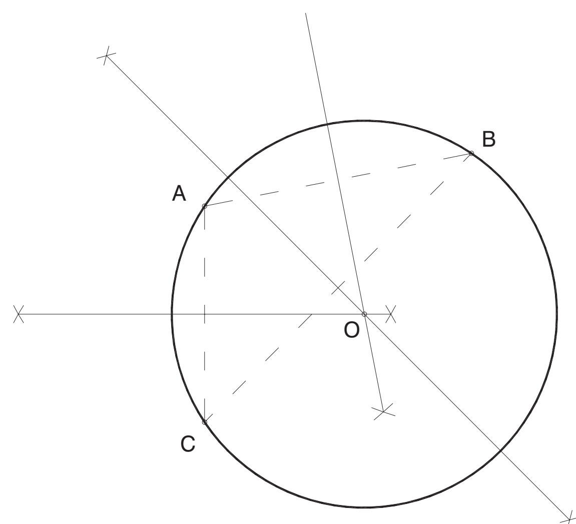


Fig. A.28

4. **Construir una circunferencia que pasa por un punto A y es tangente a una recta "m" en el punto T** (Fig. A.29).

En primer lugar se determina la mediatriz "r" del segmento AT. Luego, se traza por el punto Tuna recta "p" perpendicular a la recta tangente "m". El punto de corte entre "r" y "p" es el centro O de la circunferencia. El radio es la distancia OA u OT.

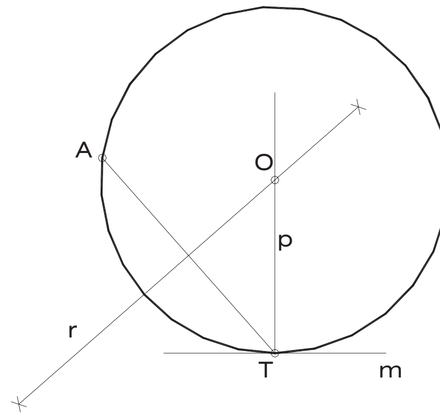


Fig. A.29

5. **Construir una circunferencia que pasa por dos puntos A y B y es tangente a una recta "t"** (Fig. A.30)

En primer lugar se construye cualquier circunferencia que pase por los puntos A y B, por ejemplo, aquella en la que AB es un diámetro. Seguidamente, se busca el punto de corte P entre la recta definida por AB y la recta tangente "t". La potencia de P con respecto a las dos circunferencias – la auxiliar y la pedida - es la misma, puesto que ambas pasan por A y B. De manera que se traza una tangente desde P a la circunferencia arbitraria, obteniéndose T'. Luego, la distancia PT' se consigna sobre la recta "t" a partir del punto P, lo cual da como resultado el punto de tangencia T entre la recta "t" y la circunferencia buscada. Existen dos soluciones para este punto.

Finalmente, se traza la mediatriz "m" de AB (también se puede dibujar la de AT o BT) y una recta "p" perpendicular a "t" por el punto T. El punto de corte entre "m" y "p" es el centro de la circunferencia, en tanto que el radio es igual a la longitud de OT, OA u OB.

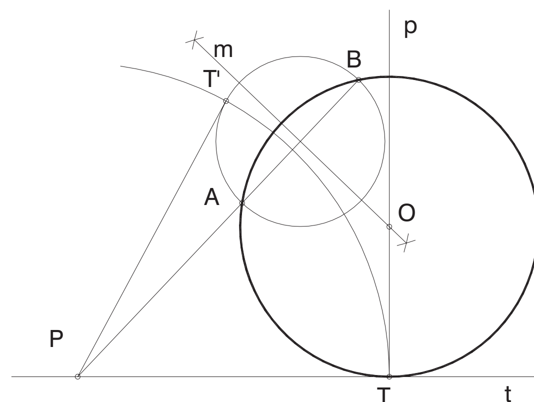


Fig. A.30

6. **Construir una circunferencia tangente a una recta “t” en el punto T y tangente a otra recta “s”** (Fig. A.31).

Se comienza determinando la bisectriz “b” del ángulo formado por las rectas “t” y “s” (hay dos soluciones). Luego, se traza por el punto T una recta “p”, perpendicular a “t”. El corte entre ambas rectas (“b” y “p”) es el centro de la circunferencia. El radio es igual a la longitud del segmento OT.

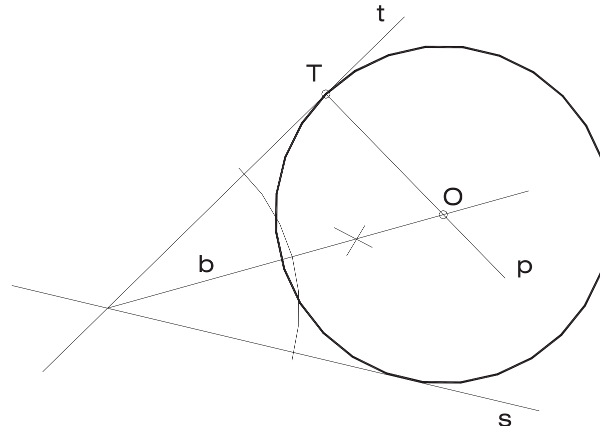


Fig. A.31

7. **Construir una circunferencia que es tangente a las rectas “t” y “s” y pasa por un punto A** (Fig. A.32)

En primer se determina la bisectriz “b” del ángulo formado entre las rectas “t” y “s” (existen dos soluciones) y se selecciona un punto T’ sobre cualquiera de las rectas tangentes (“t” en la figura). Luego, se traza por el punto T’ una perpendicular “m” a la tangente escogida. El corte entre “m” y “b” es el centro O’ de una circunferencia afín a la pedida. Seguidamente, se ubican los puntos A’ y A’’ en los que la recta definida por VA (V es el vértice del ángulo que forman las rectas “t” y “s”) corta a la circunferencia afín. Si se trazan por A rectas paralelas a los segmentos O’A’ y O’A’’ se obtienen, en los cortes con la bisectriz “b”, las dos posibles soluciones para el centro O de la circunferencia buscada.

Por último, se dibuja por O una perpendicular “p” a cualquiera de las dos tangentes, obteniéndose el punto de tangencia T. El radio de la circunferencia es igual a la longitud de los segmentos OT y OA.

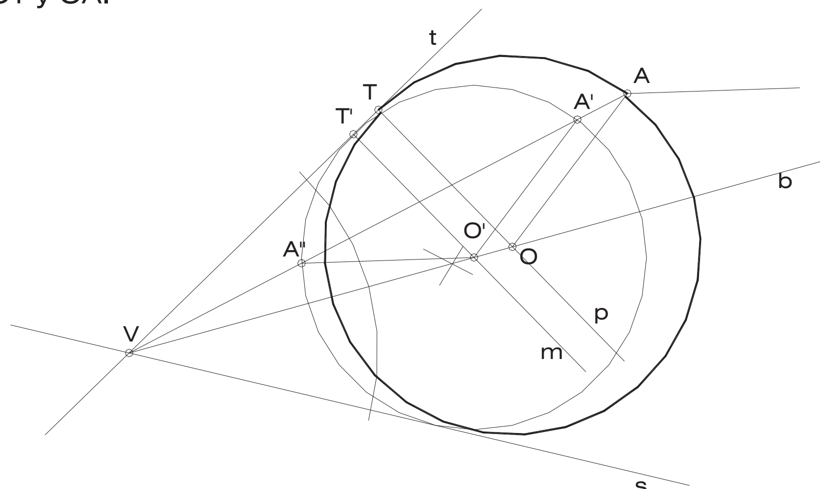


Fig. A.32

8. **Construir una circunferencia tangente a las recta "t" y "s" conocido se radio** (Fig. A.33)

Se comienza determinando la bisectriz "b" del ángulo formado entre las rectas "t" y "s" (existen dos soluciones) T' sobre cualquiera de las rectas tangentes ("t" en la figura). Luego, se traza por el punto T' una perpendicular "m" a la tangente escogida. El corte entre "m" y "b" es el centro O' de una circunferencia auxiliar. Sobre "m" y a partir de O', se consigna la longitud del radio, obteniéndose el punto 1. Seguidamente se traza por 1 una recta paralela a "t" la cual corta a la recta "b" en el punto 2. Luego, la distancia V2 (V es el vértice del ángulo que forman las rectas "t" y "s") se copia sobre la bisectriz "b" desde O', dando lugar al centro O de la circunferencia buscada.

Finalmente, se traza por O una perpendicular "p" a cualquiera de las dos tangentes, obteniéndose el punto de tangencia T. El radio de la circunferencia es igual a la longitud del segmento OT.

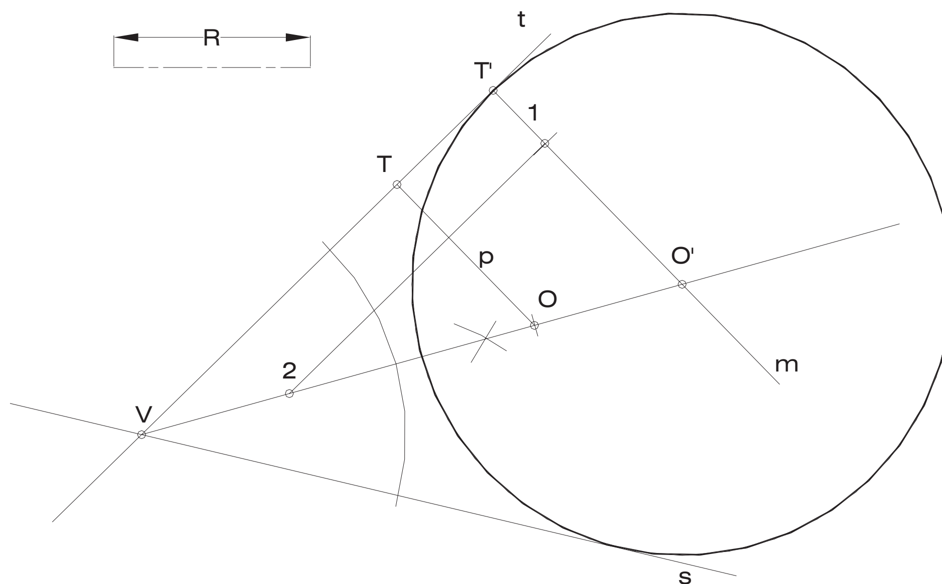


Fig. A.33

BIBLIOGRAFÍA

1) OSERS, Harry. Estudio de Geometría Descriptiva
Editorial Torino. Caracas, 1991.

2) IZQUIERDO A., Fernando. Geometría Descriptiva
Editorial Dossat. Madrid, 1985.

3) RANELLETTI, C. Elementos de geometría descriptiva y sus aplicaciones a la teoría de las sombras y al corte de piedras y maderas.
Editorial Gustavo Gili. Barcelona, 1958.

4) RODRÍGUEZ DE ABAJO, E. J. Geometría Descriptiva.
Bosch Casa Editorial. Barcelona, España, 1958.

5) GIMÉNEZ A., Julián. Estudio de los Sistemas de Representación.
Madrid [s.n.]1980.

6) RONDÓN R., Alicia y TÉLLEZ, Mary. Sistemas de Representación
Universidad de Los Andes, Facultad de Arquitectura.
Consejo de Publicaciones. Mérida, 1985.

7) PUIG ADAM, Pedro. Curso de Geometría Métrica, Tomo I.
Editorial Biblioteca Matemática. Madrid 1973.